E5.4. Biporte RC du second ordre.

1. Fonction de transfert.

Soit A le point de connexion des deux résistances et du condensateur C_1.
L'association série R_2, C_2 réalise un pont diviseur de tension. On a donc :

$$\tilde{s} = \frac{\dfrac{1}{jC_2\omega}}{R_2 + \dfrac{1}{jC_2\omega}}\widetilde{V_A} = \frac{1}{1 + jR_2C_2\omega}\widetilde{V_A}$$

On applique le théorème de Millman au point de connexion A des deux résistances et du condensateur C_1:

$$\widetilde{V_A}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + jC_1\omega\right) = \frac{\tilde{e}}{R_1} + \frac{\tilde{s}}{R_2}$$

En remplaçant l'expression de $\widetilde{V_A}$ ainsi déterminée dans la première équation on obtient la fonction de transfert :

$$\boxed{\widetilde{H}(j\omega) = \frac{1}{1 - R_1R_2C_1C_2\omega^2 + j\omega\left(R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2\right)}}$$

2. Autre forme de la fonction de transfert.

On écrit la fonction de transfert sous une forme plus symétrique :

$$\widetilde{H} = \frac{1}{\left(1 + j\dfrac{\omega}{a}\right)\left(1 + j\dfrac{\omega}{b}\right)} = \frac{1}{1 - \dfrac{\omega^2}{ab} + j\omega\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)}$$

Par identification avec le résultat de la première question, on obtient :

$$ab = \frac{1}{R_1C_1R_2C_2} \quad \text{et} \quad a + b = \frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{R_2C_2} + \frac{1}{R_2C_1}$$

Les coefficients *a* et *b*, dont on connaît la somme *S* et le produit *P* sont solution de l'équation du second degré :

$$X^2 - SX + P = 0$$

$$\boxed{X^2 - \left(\frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{R_2C_2} + \frac{1}{R_2C_1}\right)X + \frac{1}{R_1C_1R_2C_2} = 0}$$

3. Etude de la réponse en gain.

La fonction de transfert s'écrit :

$$\widetilde{H}(jx) = \frac{1}{1 - x^2 + 3jx}$$

Le gain exprimé en dB a pour expression :

$$G_{dB} = -10\log\left((1 - x^2)^2 + 9x^2\right)$$

La fonction $f(x) = (1 - x^2)^2 + 9x^2$ est strictement croissante. Il s'ensuit que le gain maximum est nul et est obtenu pour $x = 0$.

La bande passante est définie par l'ensemble des pulsations réduites vérifiant :

$$H(x) \geq \frac{Hmax}{\sqrt{2}}$$

ici $Hmax = 1$ d'où les limites de la bande passante sont données par :

$$H = \frac{1}{((1 - x^2)^2 + 9x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(1-x_c^2)^2+9x_c^2=2 \quad \Rightarrow \quad x_c=\left(\frac{\sqrt{53}-7}{2}\right)\approx 0.37$$

On obtient finalement pour la pulsation de coupure :

$$\omega_c=\frac{0.37}{RC}$$

On peut remarquer que la pulsation de coupure est différente de ω_0.

La courbe de réponse en gain admet :

- en basse fréquence :
  une asymptote horizontale à G_{BF} = 0 dB
- en haute fréquence :
  une asymptote passant par l'origine de pente - 40 dB/ décade
  G_{HF} = -40 log x = -40 X
- pour x = 1, GdB = -9,5 dB

La courbe de réponse en gain ets alors :