E5.2. Circuit coupe bande du second ordre.

1. Fonction de transfert.
En utilisant la notion de pont diviseur de tension, on obtient :

$$\widetilde{H}(j\omega) = \frac{jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1 - LC\omega^2}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

Or :

$$RC\omega = \frac{\omega}{Q\omega_o} = \frac{x}{Q} \quad ; \quad LC\omega^2 = x^2$$

On obtient :

$$\boxed{\widetilde{H}(j\omega) = \frac{1 - x^2}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} = \frac{1}{1 + j\frac{x}{Q(1 - x^2)}}}$$

2. Courbe de réponse en gain.
Le gain exprimé en décibels a pour expression :

$$GdB = 20\log\left|\widetilde{H}(j\omega)\right| = -10\log\left(1 + \frac{x^2}{Q^2(1 - x^2)^2}\right)$$

La courbe de réponse en gain admet :

- en basse fréquence : une asymptote horizontale à GdB_{BF}= 0 dB
- en haute fréquence : une asymptote horizontale à GdB_{HF} = 0 dB
- pour x = 1: une asymptote verticale $GdB(x=1) = -\infty$

Le filtre étudié est un coupe-bande d'ordre 2 qualifié de réjecteur car la pulsation réduite x = 1 n'est pas transmise.

3. Bande de réjection.
La bande de réjection est l'ensemble des fréquences vérifiant :

$$H < \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}$$

$$H = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{Q^2(1 - x^2)^2}}}$$

H prend sa valeur maximale, H_{max} = 1, lorsque x tend vers zéro ou l'infini. Les limites de la bande de réjection sont donc données par :

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{Q^2(1 - x^2)^2}}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

D'où :

$$\frac{x^2}{Q^2(1 - x^2)^2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x}{Q(1 - x^2)} = \pm 1$$

Soit :

$$x^2 \pm \frac{x}{Q} - 1 = 0$$

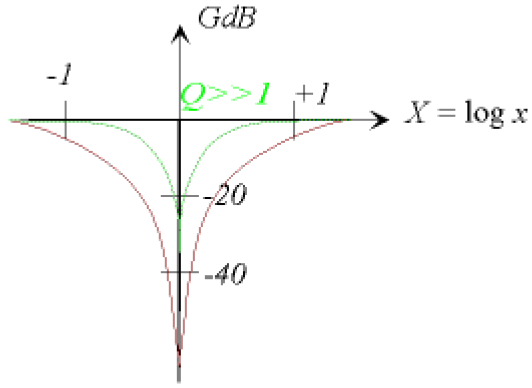
Les limites de la bande de réjection sont les racines positives de cette équation. On obtient :

$$x_{1,2} = \pm \frac{1}{2Q} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}$$

La largeur de la bande de réjection est donnée par :

$$\Delta x = \frac{1}{Q}$$

Plus la valeur de du facteur de qualité est élevée, plus la largeur de la bande de réjection est petite. On obtient donc comme réponse en gain suivant la valeur du facteur de qualité Q :



4. Courbe de réponse en phase.

L'argument de la fonction de transfert est donné par :

$$\varphi = -\arg\left(1 + j\frac{x}{Q(1-x^2)}\right)$$

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{x}{Q(1-x^2)}\right)$$

La courbe de réponse en phase passe admet :

- en basse fréquence pour $x < 1$: une asymptote horizontale $\varphi = 0$
- en haute fréquence : une asymptote horizontale $\varphi = 0$.
- pour $x = 1^-$: $\varphi = -\pi/2$
- pour $x = 1^+$: $\varphi = \pi/2$

La réponse en phase du réjecteur est discontinue en $x = 1$.