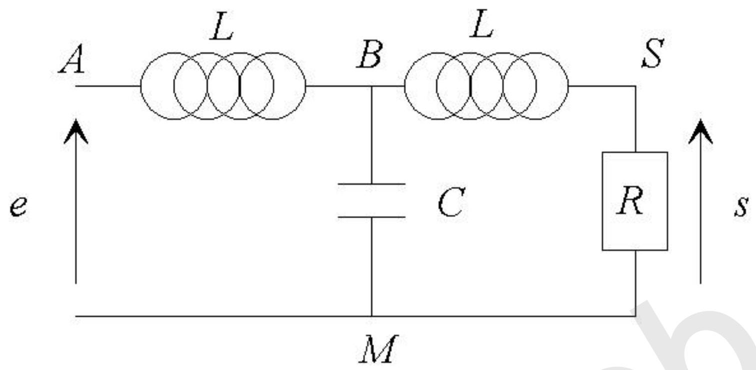
E5.11. Réalisation d'un filtre.



1. Fonction de transfert.

On applique le théorème de Millman en *B* et *S*.

On pose l'amplitude complexe du point *M* nulle :

$$\widetilde{V_{m\,M}} = 0 \;\Rightarrow\; \widetilde{V_{m\,A}} = \widetilde{E}_m \;\text{ et }\; \widetilde{V_{m\,S}} = \widetilde{S}_m$$

Au point *B* :

$$\widetilde{V_{m\,B}}\left(\frac{2}{jL\omega} + jC\omega\right) = \frac{\widetilde{E_m}}{jL\omega} + \frac{\widetilde{S_m}}{jL\omega}$$

$$\widetilde{V_{m\,B}}\left(2 - LC\omega^2\right) = \widetilde{E_m} + \widetilde{S_m}$$

Or $LC = \dfrac{1}{2\omega_o^2}$ d'où :

$$\widetilde{V_{m\,B}}\left(2 - \frac{\omega^2}{2\omega_o^2}\right) = \widetilde{E_m} + \widetilde{S_m}$$

$$\widetilde{V_{m\,B}}\left(2 - \frac{x^2}{2}\right) = \widetilde{E_m} + \widetilde{S_m} \qquad (1)$$

Au point *S* :

$$\widetilde{S_m}\left(\frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R}\right) = \frac{\widetilde{V_{m\,B}}}{jL\omega}$$

$$\widetilde{S_m}\left(1 + j\,\frac{L\omega}{R}\right) = \widetilde{V_{m\,B}}$$

Or $R = \sqrt{\dfrac{2L}{C}} \;\Rightarrow\; \dfrac{L\omega}{R} = \sqrt{\dfrac{C}{2L}}L\omega = \sqrt{\dfrac{LC}{2}}\omega = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{\omega}{\omega_o} = \dfrac{1}{2}x$ d'où :

$$\widetilde{S_m}\left(1 + j\,\frac{x}{2}\right) = \widetilde{V_{m\,B}}$$

$$\widetilde{V_{m\,B}} = \frac{1}{2}\left(2 + jx\right)\widetilde{S_m} \qquad (2)$$

On remplace dans (1) l'expression du potentiel complexe du point B obtenue en (2) :

$$\frac{1}{2}(2+jx)\left(2-\frac{x^2}{2}\right)\widetilde{S_m}=\widetilde{E_m}+\widetilde{S_m}$$

$$\frac{1}{2}\left(4-x^2+jx\left(2-\frac{x^2}{2}\right)-2\right)\widetilde{S_m}=\widetilde{E_m}$$

$$\left(\left(1-\frac{x^2}{2}\right)+jx\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\right)\widetilde{S_m}=\widetilde{E_m}$$

$$\widetilde{H}(jx)=\frac{\widetilde{S_m}}{\widetilde{E_m}}=\frac{1}{\left(1-\frac{x^2}{2}\right)+jx\left(1-\frac{x^2}{4}\right)}$$

2. Module et déphasage.

$$H(x)=\left|\widetilde{H}(jx)\right|=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^2+x^2\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^2}}$$

$$\varphi=\arg\widetilde{H}(jx)=-\arg\left(\left(1-\frac{x^2}{2}\right)+jx\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\right)$$

Pour $x<\sqrt{2}$ soit pour $\left(1-\frac{x^2}{2}\right)>0$:

$$\varphi=-\arctan x\frac{\left(1-\frac{x^2}{4}\right)}{\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}$$

Pour $x>\sqrt{2}$ soit pour $\left(1-\frac{x^2}{2}\right)<0$:

$$\varphi=-\left(\pi+\arctan x\frac{\left(1-\frac{x^2}{4}\right)}{\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}\right)$$

3. Diagramme de Bode.

Réponse en gain.

$$G_{dB}=20\log H(x)=-10\log\left(\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^2+x^2\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^2\right)$$

Pour $x\to 0 \qquad G_{dB}\to G_{dB\ \mathrm{BF}}=0$

Pour $x\to\infty \qquad G_{dB}\to G_{dB\ \mathrm{HF}}=-10\log\frac{x^6}{16}=12-60\log x$

L'intersection des asymptotes hautes et basses fréquences se fait en I tel que :

$$0 = 12 - 60\log x_I$$

$$X_I = \log x_I = \frac{12}{60} = 0,2$$

On recherche les extrema de la fonction $H(x)$ que l'on peut déterminer en étudiant la dérivée de la fonction $f(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^2 + x^2\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^2$

$$\frac{df(x)}{dx} = 2\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)(-x) + 2x\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^2 + 2x^2\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)\left(-\frac{x}{2}\right)$$

$$\frac{df(x)}{dx} = -\left(2x - x^3 - 2x\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}\right) + x^3\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)\right)$$

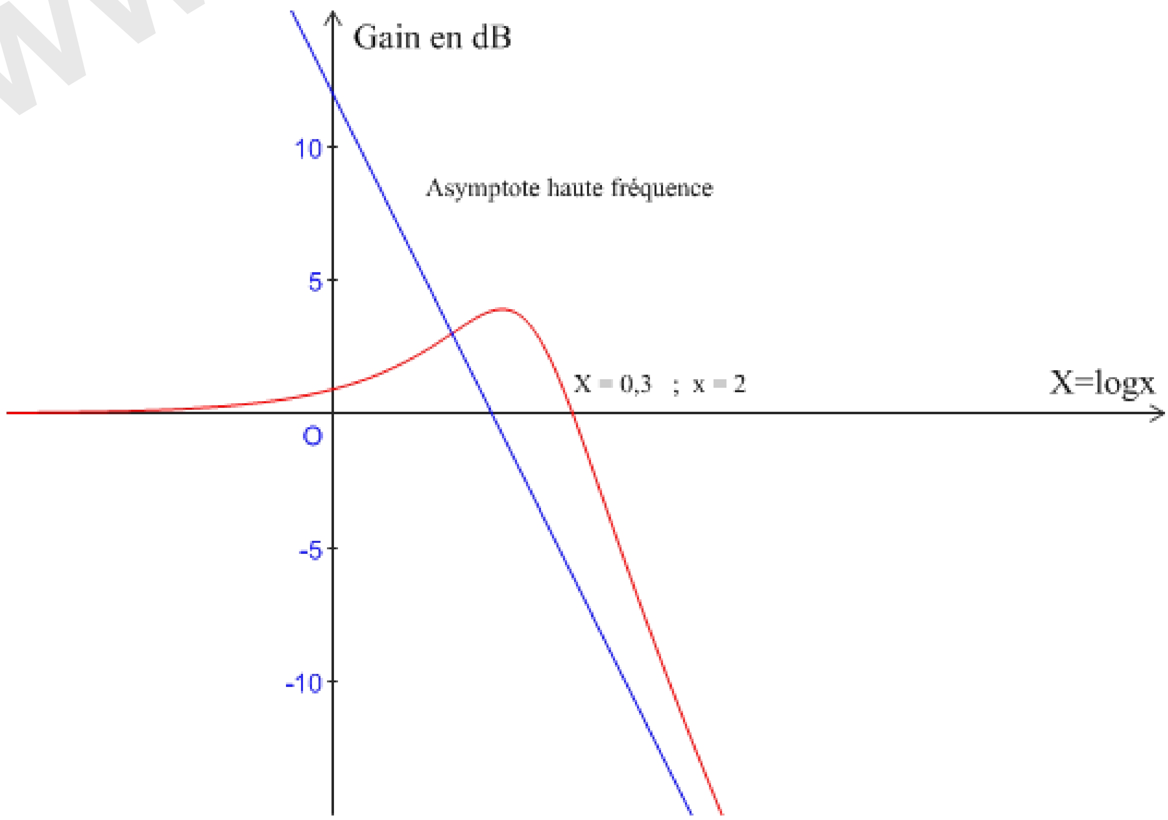
$$\frac{df(x)}{dx} = -\left(x^3 - \frac{x^5}{8} - \frac{x^5}{4}\right) = -x^3\left(1 - \frac{3x^2}{8}\right)$$

$$\frac{df(x)}{dx} = 0 \text{ pour } \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{\frac{8}{3}} \end{cases} \Rightarrow \log x = 0,21$$

D'autre part pour $f(x) = 1$ on a $G_{dB} = 0$ soit :

$$f(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^2 + x^2\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^2 = 1 - \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{16} = 1$$

$$\frac{x^4}{4}\left(\frac{x^2}{4} - 1\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \text{ soit } \log x = 0,3 \end{cases}$$



Quelques points particuliers :

$x=1$	$\log 1=0$	$G_{dB}=+0,9$ dB
$x=\sqrt{\frac{3}{8}}$	$\log\sqrt{\frac{3}{8}}=0,21$	$G_{dB}=+3,9$ dB
$x=2$	$\log 2=0,3$	$G_{dB}=0,0$ dB
$x=\sqrt{10}$	$\log\sqrt{10}=0,5$	$G_{dB}=-16,0$ dB

Réponse en phase.

Le comportement asymptotique de la phase est :

$x\to 0$	$\varphi\to 0$
$x=1$	$\varphi=0,31\pi$
$x\to\left(\sqrt{2}\right)^{-}$	$\varphi\to-\frac{\pi}{2}$
$x\to\left(\sqrt{2}\right)^{+}$	$\varphi\to-\frac{\pi}{2}$
$x=2$	$\varphi=-\pi$
$x\to\infty$	$\varphi\to-\frac{3\pi}{2}$