E3.3. Réponse à une tension en dent de scie.

1. Equation différentielle.

On applique la loi des mailles :

$$e = \frac{q}{C} + s$$

On dérive cette équation par rapport au temps :

$$\frac{de}{dt} = \frac{i}{C} + \frac{ds}{dt}$$

Or :

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{s}{R} + C'\frac{ds}{dt}$$

On obtient :

$$\frac{de}{dt} = \frac{s}{RC} + (1 + \frac{C'}{C})\frac{ds}{dt}$$

$$\boxed{\frac{ds}{dt} + \frac{1}{R(C+C')}s = \frac{C}{C+C'}\frac{de}{dt}}$$

2. Expression de *s(t)*.

i) $t \leq 0$

Il y a continuité de la tension aux bornes du condensateur *C'* d'où :

$s = 0$

ii) $0 \leq t \leq T$

La tension d'entrée est de la forme $e = kt$. On a alors comme équation différentielle :

$$\frac{ds}{dt} + \frac{1}{R(C+C')}s = \frac{kC}{C+C'}$$

La solution de cette équation est de la forme :

$$s(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{kC\tau}{C+C'} = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + kCR$$

La continuité de la tension aux bornes de *C'* permet d'écrire :

$$s(0^-) = s(0^+) \quad \Rightarrow \quad 0 = A + kRC \quad \Rightarrow \quad A = -kRC$$

La tension *s* vérifie donc l'équation :

$$\boxed{s(t) = kRC(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}$$

Comme $T << \tau$:

$$s(T) = kRC(1 - e^{-T/\tau}) \approx kRC(1 - (1 - \frac{T}{\tau})) = kRC\frac{T}{\tau} = k\frac{C}{C+C'}T$$

iii) $t > T$

Comme $e = 0$ l'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{ds}{dt} + \frac{1}{R(C+C')}s = 0$$

La solution de cette équation est de la forme :

$$s(t) = Be^{-\frac{t}{\tau}}$$

La continuité de la tension aux bornes de *C'* permet d'écrire :

$$s(T^-) = s(T^+) \quad \Rightarrow \quad k\frac{C}{C+C'}T = Be^{-T/\tau} \quad \Rightarrow \quad B = k\frac{C}{C+C'}Te^{+T/\tau}$$

La tension *s* vérifie :

$$\boxed{s(t) = k\frac{C}{C+C'}Te^{+(T-t)/\tau}}$$

Comme $e^{\frac{T}{\tau}} \approx 1$ pour $T << \tau$ on a : $s(t) \approx kT\frac{C}{C+C'}e^{-\frac{t}{\tau}}$