E3.2. Régime transitoire et facteur de qualité d'un circuit *RLC*.

1. Charge du condensateur.
On écrit la loi des mailles :
$$\frac{q}{C}+L\frac{di}{dt}+Ri=0$$
En tenant compte des données :
$$\frac{d^2q}{dt^2}+2\lambda\frac{dq}{dt}+\omega_o^2q=0$$
Comme l'amortissement est faible, le discriminant de l'équation caractéristique est négatif :
$$\Delta=4\left(\lambda^2-\omega_o^2\right)<0 \qquad \lambda\ll\omega_o$$
Les solutions de l'équation caractéristiques sont :
$$r=-\lambda\pm j\left(\omega_o^2-\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
La solution de l'équation différentielle est :
$$q(t)=e^{-\lambda t}\left(A\cos\left(\omega_o^2-\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}}t+B\sin\left(\omega_o^2-\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}}t\right)$$
A t = 0 on a :
$$q(t=0)=q_o$$
$$\dot{q}(t=0)=0$$
La bobine assure la continuité de l'intensité.
L'exploitation de ces conditions initiales permet de déterminer les constantes *A* et *B*.
$$A=q_o \qquad B=\frac{\lambda}{\sqrt{\omega_o^2-\lambda^2}}q_o$$
On obtient alors pour l'expression de la charge :
$$\boxed{q(t)=q_oe^{-\lambda t}\left(\cos\left(\omega_o^2-\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}}t+\frac{\lambda}{\sqrt{\omega_o^2-\lambda^2}}\sin\left(\omega_o^2-\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}}t\right)}$$

2. Expression de l'énergie du système.
L'énergie du circuit à pour expression :
$$W=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}+\frac{1}{2}Li^2$$
On exprime l'intensité *i(t)* :
$$i(t)=\frac{dq}{dt}=-\lambda q_oe^{-\lambda t}\left(\cos\left(\omega_o^2-\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}}t+\frac{\lambda}{\sqrt{\omega_o^2-\lambda^2}}\sin\left(\omega_o^2-\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}}t\right)+$$
$$q_oe^{-\lambda t}\left(-\left(\omega_o^2-\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}}\sin\left(\omega_o^2-\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}}t+\lambda\cos\left(\omega_o^2-\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}}t\right)$$
$$i(t)=-q_oe^{-\lambda t}\left(\left(\omega_o^2-\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{\lambda^2}{\sqrt{\omega_o^2-\lambda^2}}\right)\sin\left(\omega_o^2-\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}}t$$
En réduisant au même dénominateur on obtient :
$$i(t)=-q_oe^{-\lambda t}\frac{\omega_o^2}{\sqrt{\omega_o^2-\lambda^2}}\sin\left(\omega_o^2-\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}}t$$

Comme l'amortissement est faible, on a les approximations suivantes :

$$\lambda \ll \omega_o \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \omega_o^2 - \lambda^2 \approx \omega_o^2 \\ \dfrac{\lambda^2}{\omega_o} \ll \omega_o \end{cases}$$

On a alors les expressions approchées suivantes pour *q(t)* et *i(t)* :

$$q(t) = q_o e^{-\lambda t} \cos \omega_o t$$

$$i(t) = -q_o \omega_o e^{-\lambda t} \sin \omega_o t$$

On obtient pour expression pour l'énergie :

$$W = \frac{1}{2} q_o^2 e^{-2\lambda t} \left(\frac{1}{C} \cos^2 \omega_o t + L\omega_o^2 \sin^2 \omega_o t\right)$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2C} q_o^2 e^{-2\lambda t}}$$

3. Facteur de qualité.

On exprime la variation d'énergie relative sur une pseudo-période *T* :

$$\left|\frac{\Delta W}{W}\right| = \frac{W(t) - W(t+T)}{W(t)} = 1 - e^{-2\lambda T}$$

Or :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \Rightarrow \quad \lambda T = \frac{2\pi\lambda}{\omega} \approx \frac{2\pi\lambda}{\omega_o} << 1$$

En faisant un développement limité justifié par le résultat précédent, on obtient :

$$\left|\frac{\Delta W}{W}\right| = \frac{W(t) - W(t+T)}{W(t)} = 1 - (1 - 2\lambda T) = 2\lambda T$$

Le facteur de qualité du circuit *RLC* peu amorti est donc :

$$Q = \frac{2\pi}{|\Delta W / W|} = \frac{2\pi}{2\lambda T} = \frac{\sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2}}{2\lambda} \approx \frac{\omega_o}{2\lambda}$$

$$\boxed{Q \approx \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$$