E3.10. Réponse d'un circuit R, R'//C à un échelon de tension.

1. Expression de *u*(*t*).

Les lois de Kirchhoff permettent d'écrire :

$$i = i_1 + i_2 \qquad (1)$$
$$E = Ri + u \qquad (2)$$

Or :

$$i_1 = C\frac{du}{dt} \quad \text{et} \quad i_2 = \frac{u}{R'}$$

En injectant les expressions de (1) dans (2) on obtient :

$$E = R\left(C\frac{du}{dt} + \frac{u}{R'}\right) + u$$
$$E = RC\frac{du}{dt} + \left(1 + \frac{R}{R'}\right)u$$
$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{RC}\left(1 + \frac{R}{R'}\right)u = \frac{E}{RC}$$
$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{RC}\left(\frac{R+R'}{R'}\right)u = \frac{E}{RC}$$

Afin d'effectuer des comparaisons avec le circuit (*R*, *C*) on pose :

$$\tau = RC$$
$$\tau' = RC\frac{R'}{R+R'} = \tau\frac{R'}{R+R'}$$

On peut remarquer que :

$$\tau' < \tau$$

et que :

$\lim_{R' \to \infty} \tau' = \tau$; $R' \to \infty$ correspondant à la situation où ce conducteur n'est pas présent.

La solution de l'équation différentielle vérifiée par *u*(*t*) est de la forme :

$$u(t) = A\exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right) + \frac{R'}{R+R'}E$$

Comme à l'instant $t = 0^-$ le condensateur est déchargé et que de plus il y a continuité de la tension aux bornes d'un condensateur, on peut écrire :

$$u(0^+) = u(0^-)$$
$$A + \frac{R'}{R+R'}E = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{R'}{R+R'}E$$

On obtient ainsi l'expression de la tension *u*(*t*) :

$$u(t) = \frac{R'}{R+R'}E\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right)\right)$$

2. Comparaison du comportement de la charge du condensateur.

En l'absence de la résistance de fuite ($R' \to \infty$) on a :

$$\tau' \to \tau$$

$$u \to u = E\left(1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \quad \Rightarrow \quad q(t) = CE\left(1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

En présence de la résistance de fuite on a : $q'(t) = CE\dfrac{R'}{R+R'}\left(1-\exp\left(-\dfrac{t}{\tau'}\right)\right)$

Comme $\tau' < \tau$, la charge du condensateur s'effectue plus rapidement en présence de la résistance de fuite R'.

Le comportement à la date de fermeture de l'interrupteur s'apprécie en étudiant la pente de ces deux fonctions :

$$\frac{dq}{dt} = CE\frac{1}{\tau}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)_{t=0} = CE\frac{1}{\tau}$$

$$\frac{dq'}{dt} = CE\frac{R'}{R+R'}\frac{1}{\tau'}\exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right)$$

$$\left(\frac{dq'}{dt}\right)_{t=0} = CE\frac{R'}{R+R'}\frac{1}{\tau}\frac{R+R'}{R'} = CE\frac{1}{\tau} = \left(\frac{dq}{dt}\right)_{t=0}$$

La pente à l'origine est la même pour les deux cas.

Pour $t \to \infty$ on a :

$$q(\infty) = CE$$

$$q'(\infty) = CE\frac{R'}{R+R'} < q(\infty)$$