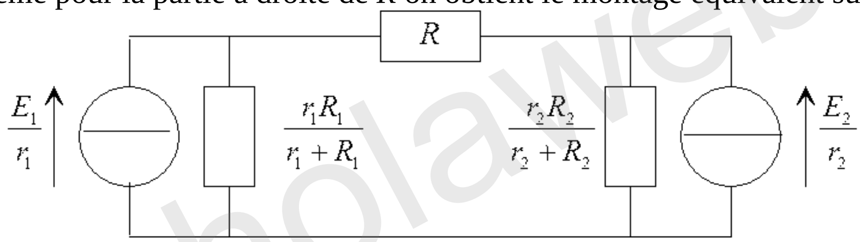
E2.3. Analyse d'un réseau linéaire par différentes méthodes.

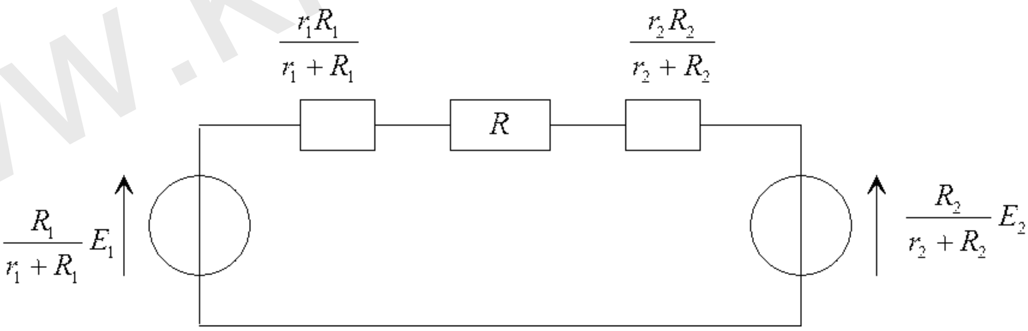
1. Utilisation des lois d'association.

On utilise la modélisation de Norton pour transformer le générateur de tension (E_1, r_1). On obtient alors un générateur de courant délivrant un courant électromoteur $\frac{E_1}{r_1}$ qui est alors disposé en parallèle avec les résistors r_1 et R_1. Ces deus résistors montés en dérivation sont alors équivalent à un résistor de résistance $\frac{r_1 R_1}{r_1 + R_1}$.

En procédant de même pour la partie à droite de *R* on obtient le montage équivalent suivant :



On transforme de nouveau le circuit en utilisant maintenant la modélisation de Thévenin :



Pour déterminer l'intensité I du courant le résistor *R*, on utilise la loi de Pouillet :

$$I = \frac{\frac{R_1}{r_1 + R_1} E_1 - \frac{R_2}{r_2 + R_2} E_2}{R + \frac{r_1 R_1}{r_1 + R_1} + \frac{r_2 R_2}{r_2 + R_2}}$$

$$I = \frac{R_1 (r_2 + R_2) E_1 - R_2 (r_1 + R_1) E_2}{r_1 R_1 (r_2 + R_2) + r_2 R_2 (r_1 + R_1) + R (r_1 + R_1)(r_2 + R_2)}$$

2. Utilisation du théorème de Millman.

On pose que le point M est au potentiel nul soit : $V_M = 0$.

D'autre part : $u_{AB} = V_A - V_B$.

Pour déterminer la tension u_{AB} on applique le théorème de Millman au point *A* et au point *B* :

$$V_A \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{r_1} \right) = \frac{E_1}{r_1} + \frac{V_B}{R}$$

$$V_B \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{r_2} \right) = \frac{E_2}{r_2} + \frac{V_A}{R}$$

Comme $V_A - V_B = RI \quad \rightarrow \begin{cases} \dfrac{V_B}{R} = \dfrac{V_A}{R} - I \\ \dfrac{V_A}{R} = \dfrac{V_B}{R} + I \end{cases}$

On remplace les expressions obtenues en fonction de I dans l'écriture du théorème de Millman :

$$V_A\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{r_1}\right) = \frac{E_1}{r_1} + \frac{V_A}{R} - I \quad \rightarrow \quad V_A\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{r_1}\right) = \frac{E_1}{r_1} - I$$

$$V_B\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{r_2}\right) = \frac{E_2}{r_2} + \frac{V_B}{R} + I \quad \rightarrow \quad V_B\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{r_2}\right) = \frac{E_2}{r_2} + I$$

On obtient :

$$V_A = \frac{R_1}{r_1 + R_1} E_1 - \frac{r_1 R_1}{r_1 + R_1} I$$

$$V_B = \frac{R_2}{r_2 + R_2} E_2 + \frac{r_2 R_2}{r_2 + R_2} I$$

Comme $V_A - V_B = RI$, on obtient :

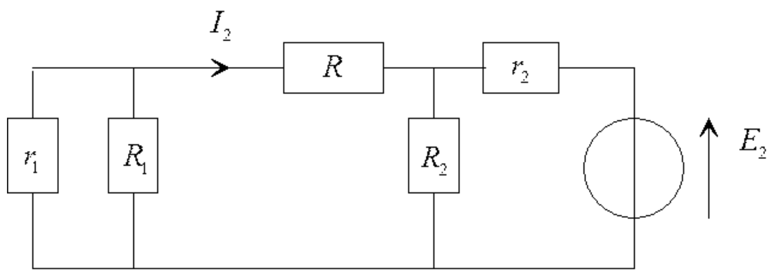
$$\frac{R_1}{r_1 + R_1} E_1 - \frac{r_1 R_1}{r_1 + R_1} I - \frac{R_2}{r_2 + R_2} E_2 - \frac{r_2 R_2}{r_2 + R_2} I = RI$$

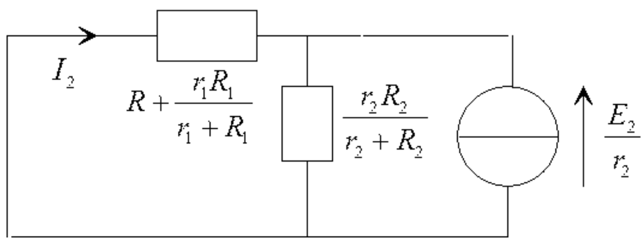
$$I = \frac{\dfrac{R_1}{r_1 + R_1} E_1 - \dfrac{R_2}{r_2 + R_2} E_2}{R + \dfrac{r_1 R_1}{r_1 + R_1} + \dfrac{r_2 R_2}{r_2 + R_2}}$$

$$I = \frac{R_1 (r_2 + R_2) E_1 - R_2 (r_1 + R_1) E_2}{r_1 R_1 (r_2 + R_2) + r_2 R_2 (r_1 + R_1) + R (r_1 + R_1)(r_2 + R_2)}$$

3. Utilisation du théorème de superposition.

On éteint dans un premier temps la source de tension E_1. Soit I_2 l'intensité du courant traversant alors la branche *AB*. On utilise les lois d'association et les différentes modélisations d'un générateur réel. On obtient les deux montages suivants :





On reconnaît dans le second montage un pont diviseur de tension, on peut alors écrire que, en faisant attention au signe :

$$I_2 = -\frac{\dfrac{r_2 R_2}{r_2 + R_2}}{R + \dfrac{r_1 R_1}{r_1 + R_1} + \dfrac{r_2 R_2}{r_2 + R_2}} \frac{E_2}{r_2}$$

$$I_2 = -\frac{R_2 \left(r_1 + R_1\right) E_2}{R\left(r_1 + R_1\right)\left(r_2 + R_2\right) + r_1 R_1 \left(r_2 + R_2\right) + r_2 R_2 \left(r_1 + R_1\right)}$$

On procède de même pour l'extinction de la source de tension E_2, et on note I_1 l'intensité du traversant dans ce cas la branche *AB*, Les calculs pour obtenir cette intensité sont de même nature que ceux qui précédent. On obtient l'expression de I_1 en permutant les indices 1 et 2 dans l'expression de I_2.

$$I_1 = \frac{R_1 \left(r_2 + R_2\right) E_1}{R\left(r_1 + R_1\right)\left(r_2 + R_2\right) + r_1 R_1 \left(r_2 + R_2\right) + r_2 R_2 \left(r_1 + R_1\right)}$$

Le théorème de superposition permet d'écrire que :

$$I = I_1 + I_2$$

Soit :

$$I = \frac{R_1 \left(r_2 + R_2\right) E_1 - R_2 \left(r_1 + R_1\right) E_2}{r_1 R_1 \left(r_2 + R_2\right) + r_2 R_2 \left(r_1 + R_1\right) + R\left(r_1 + R_1\right)\left(r_2 + R_2\right)}$$