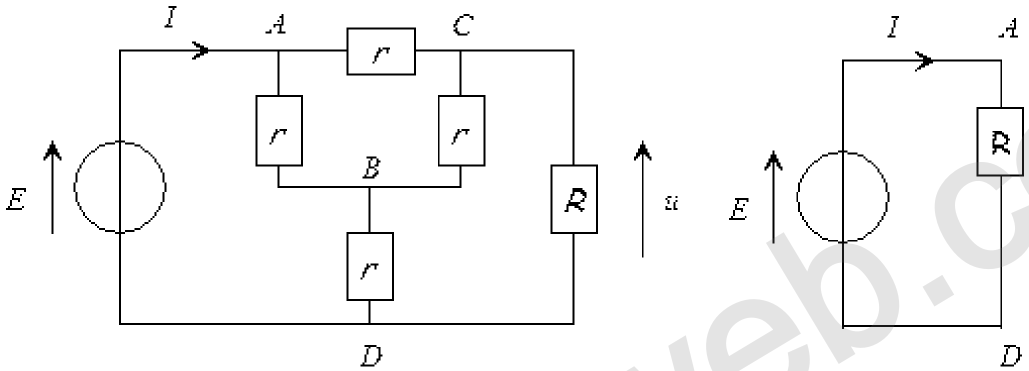
E2.17. Transformation triangle-étoile. Théorème de Kennely.

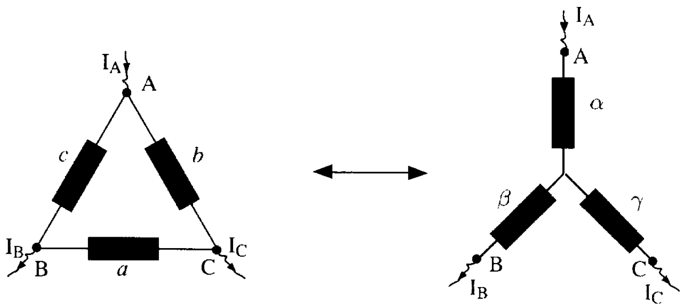
Enoncé.

On considère les circuits électriques de la figure suivante :



1. En appliquant le théorème de Kennely, déterminer la résistance R pour que l'intensité I soit la même dans les deux cas.
2. Que vaut alors u/E ?
3. Si R vérifie la condition précédente, déterminer le rapport u/E si on intercale n fois l'ensemble des quatre résistances r.

Théorème de Kennely : En un nœud N d'une association en triangle, la résistance équivalente d'un montage en étoile est : $R_N = \dfrac{\text{Produit des 2 résistances branchées en } N}{\text{Somme des résistances du triangle}}$

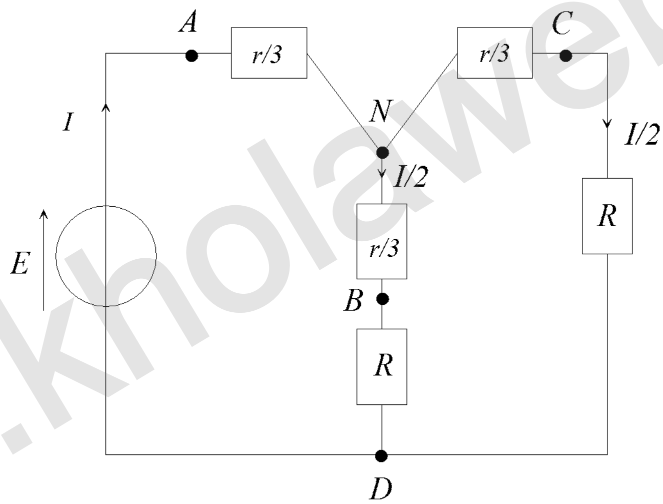


E2.17. Transformation triangle-étoile. Théorème de Kennely.
Corrigé.

1. Expression de la résistance *R*.

La portion de circuit *ABCA* est disposée en « triangle ». On la transforme en « étoile » en utilisant le théorème de Kennely et on utilise les notations de l'énoncé.

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{r^2}{3r} = \frac{r}{3}$$



Les branches *NBD* et *NCD* sont en dérivation. La résistance équivalente R_{ND} à la portion de circuit comprise entre les points *N* et *D* a pour expression :

$$\frac{1}{R_{ND}} = \frac{1}{\frac{r}{3}+R} + \frac{1}{\frac{r}{3}+r}$$

$$R_{ND} = \frac{\left(\frac{r}{3}+R\right)\left(\frac{r}{3}+r\right)}{\frac{r}{3}+R+\frac{r}{3}+r} = \frac{\left(\frac{r+3R}{3}\right)\left(\frac{4r}{3}\right)}{\frac{5r+3R}{3}} = \frac{4r\left(r+3R\right)}{3\left(5r+3R\right)}$$

La résistance équivalente à la portion de circuit comprise entre les points *A* et *D* que l'on note R_{eq} est égale à :

$$R_{eq} = \frac{r}{3} + \frac{4r\left(r+3R\right)}{3\left(5r+3R\right)} = \frac{r\left(5r+3R\right)+4r\left(r+3R\right)}{3\left(5r+3R\right)} = \frac{5r^2+3rR+4r^2+12rR}{15r+9R} = \frac{9r^2+15rR}{15r+9R}$$

On veut que $R_{eq} = R$ d'où :

$$\frac{9r^2+15rR}{15r+9R} = R \quad \rightarrow \quad 9r^2+15rR = 9R^2+15rR$$

Il reste :

$$r^2 = R^2$$

On obtient ainsi :

$$\boxed{R = r}$$

2. Expression de *u/E*.

Comme $R = r$, les branches *NBD* et *NCD* sont identiques, le courant dans les différentes branches vérifie alors :

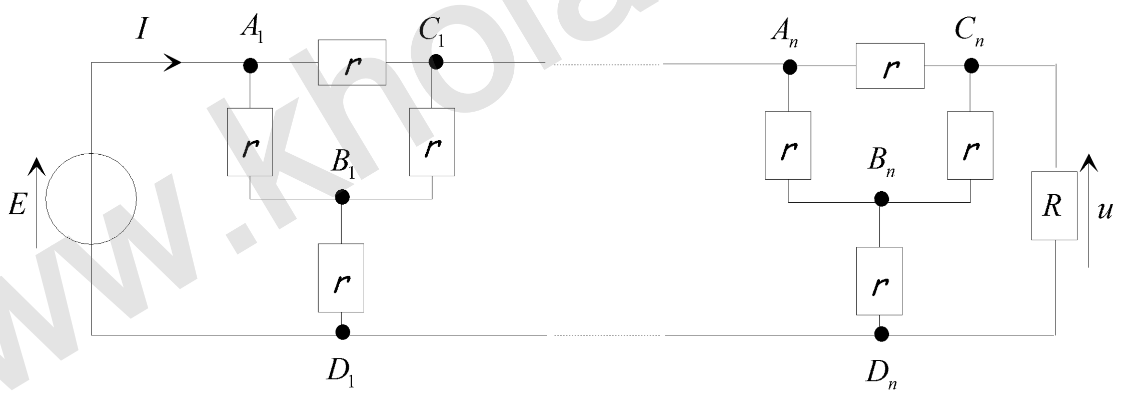
$$I_{NBD} = I_{NCD} = \frac{I}{2}$$

Comme $u = u_{CD} = R\frac{I}{2}$ et que $E = u_{AD} = RI$ on obtient :

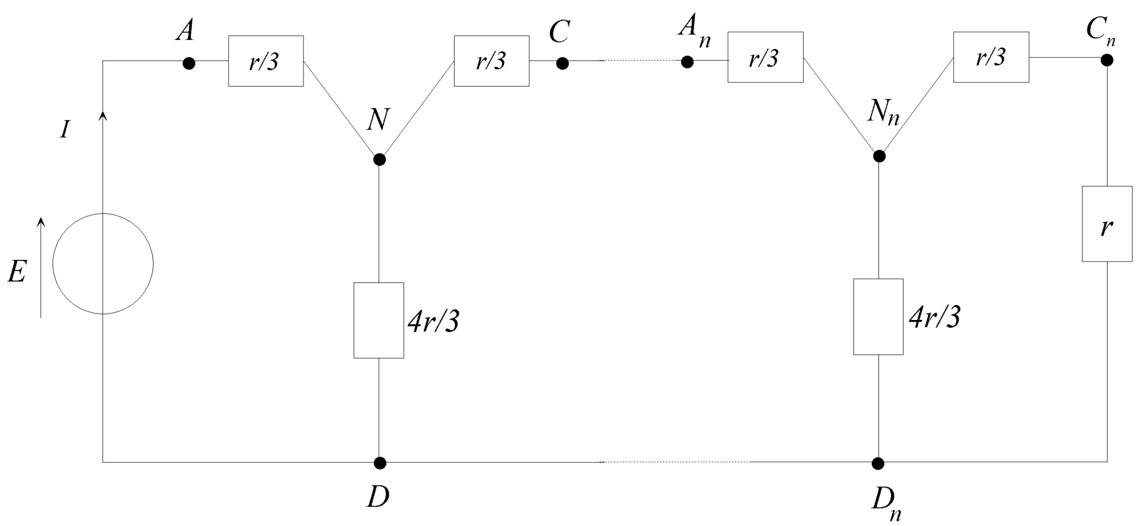
$$\frac{u}{E} = \frac{R\frac{I}{2}}{RI} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{u}{E} = \frac{1}{2}}$$

3. Cas où le motif est intercalé *n* fois.

Le réseau considéré est maintenant le suivant :



L'application du théorème de Kennely permet alors de le représenter sous la forme suivante avec la condition $R = r$:



Si l'on part de la droite, le dipôle équivalent à l'association comprise entre les points A_n et D_n a une résistance équivalente à r d'après le calcul effectué à la question 1. On retrouve ainsi la même association entre les points A_{n-1} et D_{n-1} et cela ainsi de suite jusqu'au générateur.

L'association est ainsi équivalente à un générateur de f.é.m E branché sur un résistor de résistance r et débitant un courant $I = \frac{E}{r}$.

En partant maintenant de la gauche, le courant se divise en deux au premier nœud N_1 en $\frac{I}{2}$ dans les branches N_1D_1 et N_1C_1 qui sont identiques car $R_{C_1D_1} = r$. Il en va de même au nœud N_2 où il se divise de nouveau en deux avec la valeur $\frac{I}{4} = \frac{I}{2^2}$.

On peut ainsi dire que le courant $\frac{I}{2^{n-1}}$ qui arrive au nœud N_n se divise en $\frac{I}{2^n}$ qui circule alors dans la résistance $R = r$.

La tension u a alors comme expression :

$$\boxed{u = R\frac{I}{2^n} = \frac{E}{2^n}}$$