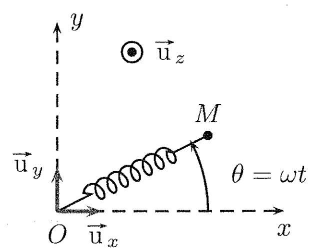
¤ PCSI ¤ 13/14. Durée 3 heures. **Calculatrice autorisée.**

Physique. Devoir surveillé N°7.

Il est rappelé que votre copie est destinée à être lue et corrigée. En conséquence, une présentation claire et lisible est recommandée. *Il en sera tenu compte dans la notation.*

Exercice 1. Rotation pour une masse soumise à un ressort.

On considère une table à coussin d'air horizontale sur laquelle peut se mouvoir, sans frottement, un mobile autoporteur ponctuel M de masse m accroché à l'extrémité d'un ressort.



La table forme le plan $\left(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y\right)$, l'extrémité fixe du ressort est située en O.

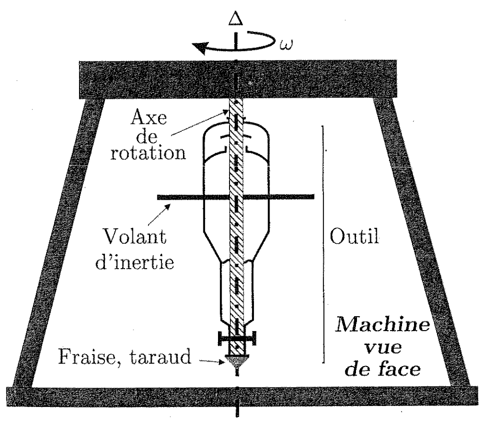
La table à coussin d'air permet de compenser le champ de pesanteur terrestre qui est dirigé le long de la verticale ascendante $\vec{g}=-g\vec{u}_z$. Le ressort possède une longueur à vide l_o et sa constante de raideur est notée k.

On pose $\omega_o=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

1. Montrer que le moment cinétique $\vec{\sigma}_O\left(M\right)$ du point M par rapport à O est conservé au cours du mouvement.
2. A $t = 0$, le mobile M est abandonné en $A\left(x=\dfrac{6}{5}l_o, y=0\right)$ sans vitesse initiale. On note $l=OM=r$ la longueur du ressort à une date t.
   a. Calculer $\vec{\sigma}_O\left(M\right)$ et en déduire la nature de la trajectoire.
   b. Etablir l'expression de $\overrightarrow{OM}\left(t\right)$ et indiquer dans quel intervalle varie la longueur du ressort.
3. On prend de nouvelles conditions initiales, $\overrightarrow{OM}\left(t=0\right)=l_1\vec{u}_x$ et $\vec{v}\left(t=0\right)=l_1\omega\vec{u}_y$ de manière à ce que le mobile autoporteur adopte un mouvement de rotation autour de l'axe $\left(O,\vec{u}_z\right)$.
   a. Exprimer le moment cinétique $\vec{\sigma}_O\left(M\right)$ et montrer qu'il se conserve au cours du mouvement. On exprimera sa norme σ en fonction de m, ω et l_1.
   b. Montrer que l'énergie mécanique de M se conserve au cours du mouvement et donner son expression.
   c. Montrer que cette énergie peut être écrite sous la forme $E_m=\dfrac{1}{2}m\dot{r}^2+E_{p,eff}\left(r\right)$ où l'on exprimera $E_{p,eff}\left(r\right)$ en fonction de r, σ , k, l_o et m.
   d. Tracer l'allure de la fonction $E_{p,eff}\left(r\right)$ et en déduire pourquoi la masse ne peut pas s'éloigner du pôle d'attraction O.

Exercice 2. Etude d'une machine tournante.

On considère une machine (tour, fraiseuse, etc.) dont une partie massive (l'outil) peut être mise en rotation autour d'un axe fixe Δ par l'action d'un couple moteur. L'outil possède un moment d'inertie J_Δ par rapport à l'axe Δ et sa vitesse angulaire de rotation autour de Δ est notée ω.



On suppose que l'ensemble des forces de frottement subies par l'outil peut être représenté par un moment par rapport à l'axe Δ de la machine de la forme $M_\Delta=-k\omega$, où k est une constante positive.

1. Initialement immobile, l'outil est soumis à partir de l'instant $t = 0$ à l'action d'un couple moteur de moment $\Gamma = \Gamma_o$ constant.
   a. Déterminer l'équation du mouvement de l'outil vérifiée par $\omega(t)$.
   b. En résolvant cette équation, analyser le mouvement de l'outil en identifiant d'abord la vitesse angulaire ω_o atteinte en régime permanent, puis le temps de relaxation τ_∞ du système correspondant à un écart relatif entre ω et ω_o inférieur à 1 %.
2. La présence de vibrations indésirables est inévitable sur ce genre de machine. Afin de les prendre en compte, on suppose que le couple moteur n'est plus constant mais modulé à la fréquence $\Omega / 2\pi$ avec un taux de modulation η. Le moment par rapport à Δ de ce couple s'écrit alors :
   $\Gamma(t) = \Gamma_o(1+\eta\cos(\Omega t))$.
   a. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la fonction $\varepsilon(t)$ telle que $\omega = \omega_o(1+\varepsilon(t))$.
   b. Montrer qu'au bout d'un temps suffisant, $\varepsilon(t)$ est une fonction sinusoïdale de pulsation Ω que l'on cherchera sous la forme $\varepsilon(t) = a\cos(\Omega t - \psi)$. On exprimera les constantes a et ψ en fonction des données η, Ω et τ.
3. A l'aide des expressions précédentes, expliquer pourquoi, de façon à régulariser le fonctionnement d'une machine tournante, on adjoint aux parties tournantes un anneau massif et de grand rayon appelé volant d'inertie.

Exercice 3. Particule dans un champ magnétique.

On étudie la trajectoire d'une particule de charge q positive et de masse m dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et permanent. La vitesse initiale $\vec{v}_o$ de la particule peut être quelconque.

1. Montrer que la norme de la vitesse de la particule est constante.
2. On travaille en coordonnées cartésiennes. L'axe z est choisi parallèle au champ magnétique, qui s'écrit $\vec{B} = B\vec{u}_z$, et la vitesse de la particule est notée $\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z$.
   Ecrire la relation fondamentale de la dynamique en projection dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.
   Qu'en déduit-on concernant la composante de la vitesse parallèle au champ magnétique ?
3. On note désormais :
   $\vec{v}_{//} = \dot{z}\vec{u}_z$ la composante de la vitesse parallèle à $\vec{B}$;
   $\vec{v}_\perp = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y$ la composante de la vitesse orthogonale à $\vec{B}$.
   Montrer que $\|\vec{v}_\perp\|$ est constante.
4. L'étude de $\vec{v}_\perp$ se résume donc à l'étude du mouvement d'une particule ayant une trajectoire contenue dans le plan (Oxy) perpendiculaire au champ magnétique et dont la vitesse initiale serait le $\vec{v}_\perp$ initial de la véritable particule étudiée. Il faut des conditions initiales pour résoudre complètement le problème. Pour simplifier les calculs, on choisit l'axe x parallèle à la composante dans le plan $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ de la vitesse initiale de la particule. La position de la particule à l'instant initial est prise comme origine du repère. En résumé : conditions initiales à $t = 0$: $\vec{v} = \dot{x}_o\vec{u}_x$, $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.
   Les deux équations vérifiées par $x(t)$ et $y(t)$ sont couplées, ce qui complique les choses. Pour ramener ce problème à une équation facilement soluble, on fait apparaître la grandeur complexe $\underline{u} = x + iy$.
   Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\underline{u}$ et la résoudre, en faisant apparaître dans les calculs la grandeur $\omega = \dfrac{qB}{m}$, dont la dimension est à préciser. En déduire les expressions de $x(t)$ et $y(t)$.
5. En déduire que la trajectoire de la particule, en projection sur le plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$, est un cercle dont les caractéristiques (centre, rayon et sens de parcours) sont à préciser en fonction de $\dot{x}_o$ et ω.
6. Au vu des résultats de l'étude, donner les caractéristiques de la trajectoire générale d'une particule dans un champ magnétique uniforme.