Modélisation d'un microscope.

1. Position du point A.

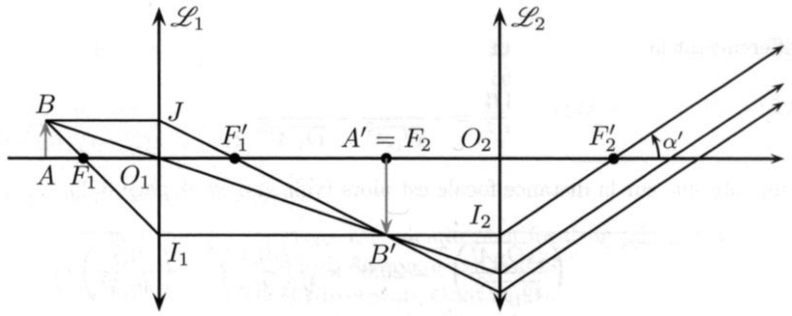
L'œil n'a pas à accommoder s'il vise à l'infini ; l'image $A''B''$ de AB à travers le microscope doit donc être à l'infini. Il faut pour cela que l'image intermédiaire $A'B'$ à travers $\mathscr{L}_1$ soit dans le plan focal objet de $\mathscr{L}_2$, soit $A' = F_2$. La détermination de F_1A peut alors se faire directement à l'aide de la formule de Newton :

$$\overline{F_1'A'}.\overline{F_1A} = -f_1'^2$$

$$\overline{F_1A} = \frac{-f_1'^2}{\overline{F_1'A'}} = \frac{-f_1'^2}{\overline{F_1'F_2}}$$

$$\boxed{\overline{F_1A} = -\frac{f_1'^2}{\Delta} = -0,1\text{ mm}}$$

2. Marche d'un faisceau lumineux issu de B.



3. Grossissement.

Dans le triangle $F_2'O_2I_2$:

$$\tan\alpha' = \frac{\overline{O_2I_2}}{\overline{F_2'O_2}} = -\frac{\overline{A'B'}}{f_2'}$$

Or :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{O_1J}} = \frac{\overline{F_1'A'}}{\overline{F_1'O_1}} = -\frac{\Delta}{f_1'}$$

Donc $\alpha' \approx \tan\alpha' = \frac{\overline{AB}\Delta}{f_1'f_2'}$. D'autre part,

$$\alpha \approx \tan\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{F_2'A}} = \frac{\overline{AB}}{-2f_2' - \Delta - 2f_1' + \overline{F_1A}} = -\frac{\overline{AB}}{2f_2' + \Delta + 2f_1' + \frac{f_1'^2}{\Delta}}$$

soit

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{\overline{AB}\Delta}{f_1'f_2'} \times \frac{2f_2' + \Delta + 2f_1' + \frac{f_1'^2}{\Delta}}{\overline{AB}}$$

$$\boxed{G = -\frac{\Delta^2 + 2\Delta\left(f_1' + f_2'\right) + f_1'^2}{f_1'f_2'} = -6,0.10^2}$$

Le signe négatif signifie que l'image est renversée par rapport à l'objet.

4. Modification de la distance entre l'objectif et l'objet.

L'observateur pourra encore accommoder sur l'image $A''B''$ de l'objet à travers le microscope si celle-ci est distante de l = 25cm de son œil, soit $\overline{F_2'A''} = -l$.

En utilisant la formule de Newton pour la lentille $\mathscr{L}_2$, $\overline{F_2^{'}A''}.\overline{F_2A'} = -f_2^{'2}$ donc $\overline{F_2A'} = \frac{f_2^{'2}}{l}$.

Ensuite, on exprime $\overline{F_1^{'}A'} = \overline{F_1^{'}F_2} + \overline{F_2A'} = \Delta + \frac{f_2^{'2}}{l}$ et on utilise une nouvelle fois la formule de Newton, mais pour $\mathscr{L}_2$ cette fois,

$$\overline{F_1A} = -\frac{f_1^{'2}}{\overline{F_1^{'}A'}} = -\frac{f_1^{'2}}{\Delta + \frac{f_2^{'2}}{l}}$$

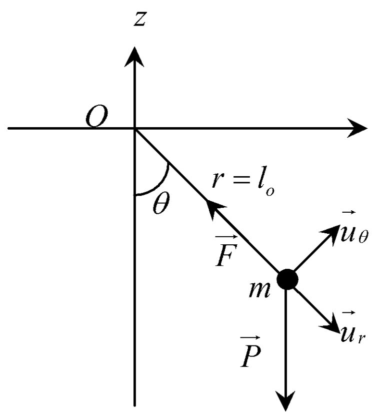
$$\boxed{\overline{F_1A} = -\frac{lf_1^{'2}}{l\Delta + f_2^{'2}} = -0,099 \text{ mm}}$$

La différence avec la position qui permet à l'œil de ne pas avoir à accommoder n'est que de 10µm , cela signifie que la plage sur laquelle l'observateur voit net (la profondeur de champ) est très faible. La distance du microscope à l'objet doit être réglée avec précision.

Mouvement d'un pendule.

1. Equation différentielle du mouvement.
On étudie la masse *m* dans le référentiel terrestre posé galiléen. On utilise la base locale cylindro-polaire associée au mouvement de *M*.
Le système est soumis à :

- son poids $m\vec{g}$
- la tension $\vec{F} = -F\vec{u}_r$



Le principe fondamental de la dynamique, projeté sur les vecteurs de la base locale cylindro-polaire, donne les deux équations :

$$\begin{cases} -F + mg\cos\theta = -ml_o\dot{\theta}^2 & (1) \quad \text{en projection suivant } \vec{u}_r \\ -mg\sin\theta = ml_o\ddot{\theta} & (2) \quad \text{en projection suivant } \vec{u}_\theta \end{cases}$$

L'équation (2) est l'équation du mouvement que l'on écrit :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \Omega_o^2 \sin\theta = 0}$$

2. Expression de ω^2.
Comme $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$, en écrivant $\dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d\omega}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} = \omega\dfrac{d\omega}{d\theta} = \ddot{\theta}$ et en utilisant le résultat précédent, il vient :

$\omega\dfrac{d\omega}{d\theta} + \Omega_o^2\sin\theta = 0$ que l'on peut aussi écrire sous la forme suivante :

$$d\left(\frac{1}{2}\omega^2 - \Omega_o^2\cos\theta\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}\omega^2 - \Omega_o^2\cos\theta = Cste$$

On en déduit, compte tenu des conditions initiales,

$$\frac{1}{2}\omega_o^2 - \Omega_o^2 = Cste$$

$$\boxed{\omega^2 = \omega_o^2 + 2\Omega_o^2\left(\cos\theta - 1\right)}$$

3. Période des petites oscillations.
Pour de petites oscillations on a :

$\ddot{\theta} + \Omega_o^2\theta = 0$ qui s'intègre, au vu des conditions initiales, selon :

$$\theta(t) = \frac{\omega_o}{\Omega_o}\sin\Omega_o t$$

et la période des petites oscillations s'écrit :

$$T_o = \frac{2\pi}{\Omega_o}$$

Si l'amplitude des oscillations n'est plus négligeable on a $|\sin\theta| < |\theta|$ et l'accélération de rappel $\ddot{\theta}$ est, en valeur absolue, légèrement inférieure à celle qu'on a utilisée dans la résolution approchée ci-dessus ; le mouvement est donc plus lent, surtout pour les grandes valeurs de θ, et donc $T > T_o$.

4. Expression de la force de tension.
L'équation (1) permet d'écrire que :

$$F = mg\cos\theta + ml_o\dot{\theta}^2$$

En utilisant le résultat de la deuxième question, on a donc :

$$\boxed{F = ml_o\omega_o^2 + mg\left(3\cos\theta - 2\right)}$$

Le fil reste tendu si $F > 0$ donc si seulement :

$$\boxed{\cos\theta > \frac{2-\dfrac{\omega_o^2}{\Omega_o^2}}{3}}$$

Les valeurs limites de θ sont données par $\dot{\theta}=\omega=0$ donc encore par $|\theta|\le\theta_{\max}$ avec $\cos\theta_{\max}=1-\dfrac{\omega_o^2}{2\Omega_o^2}$; on aura ainsi toujours $\cos\theta\le 1-\dfrac{\omega_o^2}{\Omega_o^2}$.

Le fil restera donc tendu pendant toute la durée du mouvement seulement si :

$$1-\frac{\omega_o^2}{2\Omega_o^2} < \frac{2-\dfrac{\omega_o^2}{\Omega_o^2}}{3} \quad \text{soit si} \quad \boxed{\omega_o > \frac{\Omega_o}{\sqrt{2}}}$$

Il faut lancer le pendule avec une vitesse angulaire initiale suffisante.

5.a. Pendule conique. Mouvement uniforme.

On reprend le même système qui est soumis au même bilan de forces dans le référentiel d'étude.

Pour ce type de mouvement, il est nécessaire de changer de base cylindro-polaire : les vecteurs $\vec{u}_r,\vec{u}_\theta$ sont maintenant contenus dans le plan *xOy*.

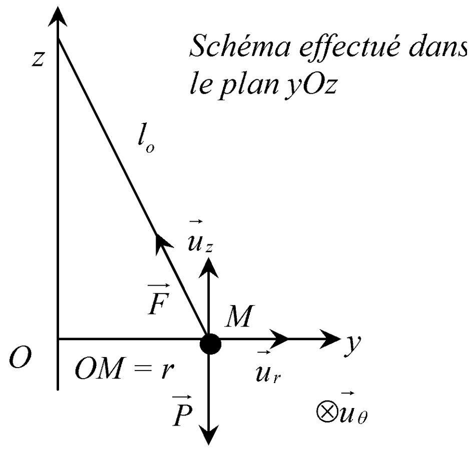
La trajectoire a pour équations *r = cte*, $z=\sqrt{l_o^2-r^2}=cte'$.

Les forces appliquées sont le poids $-mg\vec{u}_z$ et la tension du fil qui est un vecteur du plan $(\vec{u}_r,\vec{u}_z)$.

Ces forces n'ont donc pas de composante sur $\vec{u}_\theta$: l'accélération orthoradiale est nulle.

Comme l'accélération orthoradiale s'écrit dans le cas général sous la forme $a_\theta=2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}$ son expression est, dans le cadre de cette étude, $a_\theta=r\ddot{\theta}=0$. On déduit de cela que :

$$\dot{\theta}=\Omega=cste$$



5.b. Recherche de $\Omega_{\min}$.

La seconde loi de Newton projetée suivant les vecteurs $(\vec{u}_r,\vec{u}_z)$ donne :

$$\begin{cases} F_r=-mr\Omega^2 \\ F_z-mg=0 \end{cases}$$

Comme la force $\vec{F}$ est alignée avec le fil on a :

$$\frac{F_r}{F_z}=-\frac{r}{z}=-\frac{r\Omega^2}{g} \quad \text{soit} \quad g=z\Omega^2$$

Cette dernière expression n'a de sens que si $z<l_o$ soit si $\dfrac{g}{\Omega^2}<l_o \Rightarrow \Omega^2>\dfrac{g}{l_o}=\Omega_o^2$. Ainsi :

$$\boxed{\Omega>\Omega_m=\Omega_o}$$

Equilibre d'un point matériel. Aspect énergétique.

1. Energie potentielle. Définition.

Une force $\vec{f}(M)$ dérive d'une énergie potentielle $E_p(M)$, fonction scalaire de la position du point M d'application de la force, si le travail élémentaire $\delta W^{\vec{f}(M)}$ de cette force est égal à l'opposé de la différentielle de la fonction $E_p(M)$, soit :

$$\boxed{\delta W^{\vec{f}(M)} = -dE_p(M)}$$

Quand cette condition est vérifiée, la force est dite conservative et son travail entre deux points donnés ne dépend pas du chemin suivi entre ces deux points.

2. Energie potentielle de pesanteur.

Le travail élémentaire de la force de pesanteur s'écrit :

$$\delta W^{\vec{P}} = \vec{P}.d\overrightarrow{OM} = m\vec{g}.d\overrightarrow{OM}$$

Avec les notations de l'énoncé :

$$\delta W^{\vec{P}} = m\vec{g}.d\overrightarrow{OM} = -mg\vec{u}_z.\left(dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z\right) = -mgdz$$

$$\delta W^{\vec{P}} = -d(mgz) = -dE_p$$

On obtient ainsi :

$$\boxed{E_p = mgz + Cste}$$

3. Energie potentielle élastique.

Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire orienté dans le sens de l'élongation positive d'un ressort. La force de rappel de ce ressort s'écrit alors :

$$\vec{T} = -k(l - l_o)\vec{u}$$

Le travail élémentaire de cette force a pour expression :

$$\delta W^{\vec{T}} = \vec{T}.d\overrightarrow{OM} = -k(l - l_o)\vec{u}.dl\vec{u}$$

$$\delta W^{\vec{T}} = -k(l - l_o)dl = -k(l - l_o)d(l - l_o)$$

$$\delta W^{\vec{T}} = -d\left(\frac{1}{2}k(l - l_o)^2\right) = -dE_p$$

Soit au final :

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2}k(l - l_o)^2 + Cste'}$$

4. Energie potentielle totale.

L'énergie potentielle totale est la somme des énergies potentielles de pesanteur et élastique :

$$E_{p\ \text{tot}} = mgz + \frac{1}{2}k(l - l_o)^2 + K$$

Comme :

$$z = -R\cos\theta$$

$$l_o = R$$

$$l = R + R\sin\theta = R(1 + \sin\theta)$$

On obtient :

$$E_{p\ \text{tot}} = -mgR\cos\theta + \frac{1}{2}kR^2\sin^2\theta + K$$

L'énergie potentielle de référence étant prise en $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a :

$$E_{p\ \text{tot}}\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}kR^2+K=0\Rightarrow K=-\frac{1}{2}kR^2$$

Finalement :

$$E_{p\ \text{tot}}=-mgR\cos\theta+\frac{1}{2}kR^2\sin^2\theta-\frac{1}{2}kR^2=-mgR\cos\theta-\frac{1}{2}kR^2\left(1-\sin^2\theta\right)$$

$$\boxed{E_{p\ \text{tot}}=-mgR\cos\theta-\frac{1}{2}kR^2\cos^2\theta=-mgR\cos\theta\left(1+\frac{1}{2\alpha}\cos\theta\right)}$$

4. Positions d'équilibre.

Les positions d'équilibre correspondent aux extremums de l'énergie potentielle totale :

$$\frac{dE_{p\ \text{tot}}}{d\theta}=mgR\sin\theta+kR^2\sin\theta\cos\theta=-mgR\left(-\sin\theta-\frac{1}{\alpha}\cos\theta\sin\theta\right)=mgR\sin\theta\left(1+\frac{1}{\alpha}\cos\theta\right)=0$$

$$\frac{dE_{p\ \text{tot}}}{d\theta}=0\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\sin\theta=0\quad\theta_{1e}=0\ \text{ ou }\ \theta_{2e}=\pi\\ \cos\theta_{3e}=-\alpha\ \text{ avec }\alpha<1\end{cases}$$

5. Stabilité des positions d'équilibre.

C'est le signe de la dérivée seconde de l'énergie potentielle totale qui permet de déterminer la stabilité d'une position d'équilibre.

$$\frac{d^2E_{p\ \text{tot}}}{d^2\theta}=mgR\left(\cos\theta\left(1+\frac{1}{\alpha}\cos\theta\right)-\frac{1}{\alpha}\sin^2\theta\right)$$

$$\frac{d^2E_{p\ \text{tot}}}{d^2\theta}=mgR\left(\cos\theta+\frac{1}{\alpha}\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)\right)$$

$$\frac{d^2E_{p\ \text{tot}}}{d^2\theta}=mgR\left(\cos\theta+\frac{1}{\alpha}\left(2\cos^2\theta-1\right)\right)$$

On étudie maintenant le signe de cette dernière expression pour les différentes valeurs des angles correspondant aux trois postions d'équilibre précédemment déterminées.

- $$\left(\frac{d^2E_{p\ \text{tot}}}{d^2\theta}\right)_{\theta_{1e}=0}=mgR\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)>0$$

  La position $\theta_{1e}=0$ est une position d'équilibre *stable*.

- $$\left(\frac{d^2E_{p\ \text{tot}}}{d^2\theta}\right)_{\theta_{2e}=\pi}=mgR\left(-1+\frac{1}{\alpha}\right)>0$$

  La position $\theta_{2e}=\pi$ est une position d'équilibre *stable*.

- $$\left(\frac{d^2E_{p\ \text{tot}}}{d^2\theta}\right)_{\theta_{3e}}=mgR\left(-\alpha+\frac{1}{\alpha}\left(2\alpha^2-1\right)\right)=mgR\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)<0$$

  La position θ_{3e} est une position d'équilibre *instable*.