Physique.
Devoir surveillé N°4.

Il est rappelé que votre copie est destinée à être lue et corrigée. En conséquence, une présentation claire et lisible est recommandée. *Il en sera tenu compte dans la notation.*

Exercice 1. Sismographe simple

Le sismographe vertical, représenté sur la figure 1, est constitué d'un solide (Σ) de masse m suspendu à un ressort dont l'autre extrémité Ω est liée à un bâti rigide solidaire du sol en vibration. Un dispositif d'acquisition permet d'enregistrer le mouvement du solide par rapport au bâti. On souhaite que ce mouvement reproduise le plus fidèlement possible celui du sol par rapport au référentiel d'étude $\Re$ de centre O et d'axe vertical OZ supposé galiléen. Le sol est supposé horizontal. Son mouvement vertical, lors d'une secousse sismique sinusoïdale de pulsation ω, est repéré par la cote, mesurée par rapport à $\Re$:

$$Z_s(t) = Z_o \cos(\omega t)$$

Le ressort, de masse négligeable, de constante de raideur k, de longueur au repos l_o, a pour longueur $l(t)$ à l'instant t. Un amortisseur, relié au ressort, exerce sur le solide une action mécanique modélisée par la force : $\vec{f} = -\lambda \dot{z} \vec{u}_Z$. Pour les applications numériques on prendra $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$.

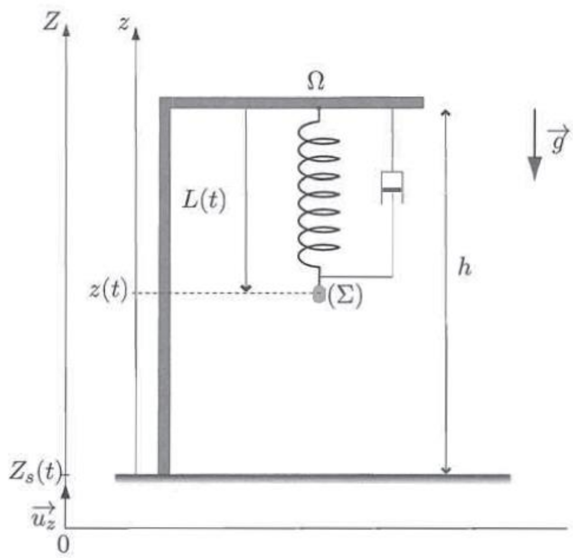


Figure 1. Sismographe simple.

On note l_e la longueur du ressort quand le solide est à l'équilibre en l'absence de secousse sismique. Le solide se situe alors à la cote z_e repérée par rapport au bâti. La position du solide est repérée par : $x(t) = z(t) - z_e$ où $z(t)$ est également repéré par rapport au bâti du sismographe.

1. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ lors de la secousse sismique. L'écrire sous la forme :
   $$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_o}{Q}\frac{dx}{dt} + \omega_o^2 x = \omega^2 Z_o \cos \omega t$$
   Donner les expressions, les significations physiques et les dimensions des grandeurs ω_o et Q.

2. On cherche la réponse du sismographe sous la forme : $x(t) = X_o \cos(\omega t + \varphi)$.

   En posant : $u = \dfrac{\omega}{\omega_o}$ déterminer le rapport $\dfrac{X_o}{Z_o}$ en fonction de u et Q.

   Le graphe représentant les évolutions de $\dfrac{X_o}{Z_o}$ en fonction de u, pour différentes valeurs du paramètre

Q, est donné en figure 2 :

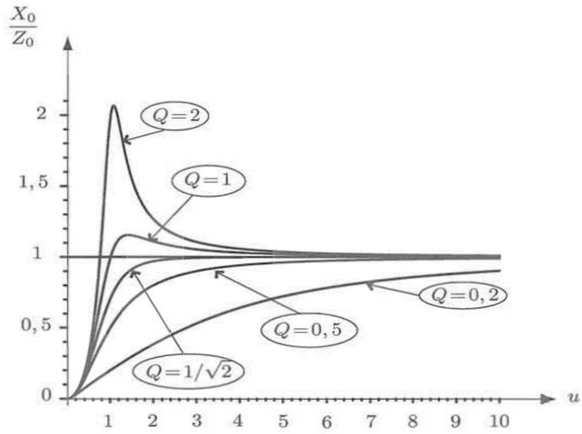
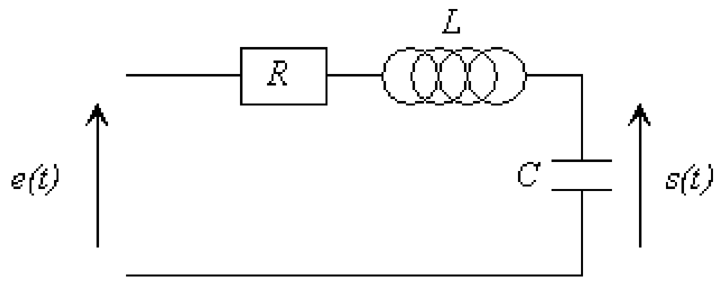


Figure 2. Réponse fréquentielle du sismographe.

3. Vérifier que l'allure de ce graphe est compatible, à haute et basse fréquence, avec l'expression calculée. Comment peut-on qualifier ce filtre ?
4. On pose $Y = \left(\frac{Z_o}{X_o}\right)^2$ et $\zeta = \frac{1}{u}$. En étudiant la fonction $Y(\zeta)$, montrer qu'il ne peut pas y avoir résonance si Q est inférieur à une valeur limite Q_o à déterminer.
5. Comment faut-il choisir la pulsation propre ω_o par rapport à la pulsation ω de la secousse sismique ? Justifier physiquement ce résultat.
6. Quel est le meilleur choix pour le paramètre Q, en termes de fidélité de la réponse et de durée du régime transitoire ?
7. Quel est l'ordre de grandeur de l'allongement Δl du ressort à l'équilibre d'un sismographe optimisé pour détecter des ondes sismiques dont la période est de l'ordre de la seconde ? Commenter.

Exercice 2. Circuit *RLC*. Facteur de qualité : approche énergétique.

On étudie le circuit linéaire ci-dessous.



Il est composé de trois dipôles en série : une résistance R, une inductance parfaite de coefficient d'induction L, et d'un condensateur de capacité C.

Il est soumis à une tension d'entrée sinusoïdale $e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi_e)$ .On note $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi_s)$ la tension de sortie.

En notation complexe, on notera :

pour $e(t)$, $\underline{e}(t) = \underline{E_m} e^{j\omega t} = E_m e^{j\varphi_e} e^{j\omega t}$ avec $\underline{E_m}$, l'amplitude complexe,

pour $s(t)$, $\underline{s}(t) = \underline{S_m} e^{j\omega t} = S_m e^{j\varphi_s} e^{j\omega t}$ avec $\underline{S_m}$, l'amplitude complexe.

1. A l'aide de deux schémas équivalents du circuit, l'un en hautes fréquences, l'autre en basses fréquences, déterminer la tension de sortie et en déduire la nature de ce dispositif.

2.a Etablir l'expression du rapport $\underline{H}(jx) = \dfrac{\underline{S_m}}{\underline{E_m}}$ de ce filtre. On posera :

$\omega_o = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}, x = \dfrac{\omega}{\omega_o}, Q = \dfrac{L\omega_o}{R} = \dfrac{1}{RC\omega_o}$. Donner l'ordre de ce filtre.

2.b Si $e(t)$ est une fonction quelconque du temps (non sinusoïdale), quelle est l'équation différentielle entre les fonctions $s(t)$ et $e(t)$ en fonction de Q et ω_o ?

Pour quelle raison peut-on affirmer la convergence du régime transitoire ?

3. Exprimer le module de la fonction $|\underline{H}(jx)|$, en fonction de x et Q.

4. Montrer que $|\underline{H}(jx)|$ passe par un maximum pour $Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Comment appelle-t-on ce phénomène ?

Déterminer, ω_r , la pulsation correspondant à ce phénomène, en fonction de Q et ω_o .

5. Interprétation énergétique du facteur de qualité Q.

On suppose $Q >> 1$ et $\varphi_e = 0$ pour le déphasage de la tension d'entrée.

5.a Montrer que si $\omega = \omega_o$, alors $i(t) = I_m \cos\omega_o t$. Donner l'expression de I_m.

5.b Déterminer alors $u_c(t)$, la tension aux bornes du condensateur en fonction de C, ω_o *et* I_m

5.c On note ΔW , l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance sur une période. Montrer que $\Delta W = \dfrac{\pi R I_m^2}{\omega_o}$.

5.d On note W_m , l'énergie maximale reçue par le condensateur. Montrer que $W_m = \dfrac{I_m^2}{2C\omega_o^2}$.

5.e En déduire que $Q = 2\pi \dfrac{W_m}{\Delta W}$