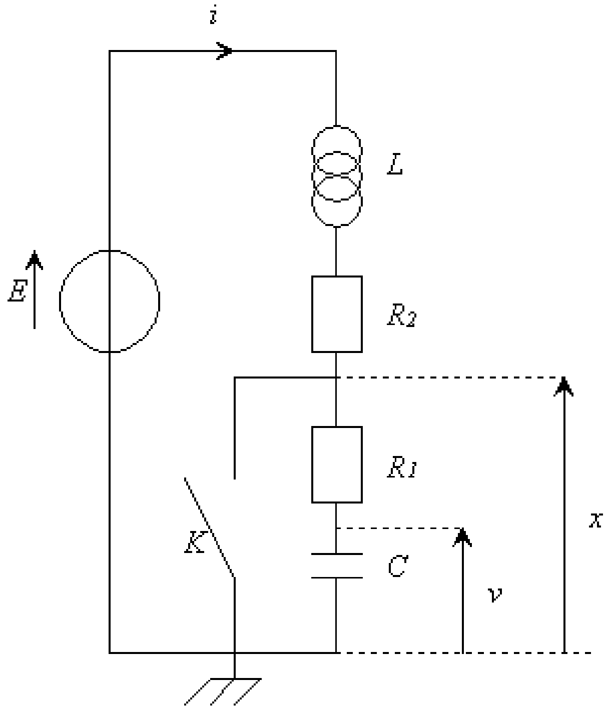
¤ PCSI ¤ 13/14. Durée 2 heures. **Calculatrice autorisée.**

Physique.
Devoir surveillé N°3. Concours blanc 1.

Il est rappelé que votre copie est destinée à être lue et corrigée. En conséquence, une présentation claire et lisible est recommandée. *Il en sera tenu compte dans la notation.*

Exercice 1 : Circuit oscillant

Le circuit représenté sur la figure, est maintenu, l'interrupteur K étant fermé, dans cette configuration durant un temps suffisamment long pour qu'on puisse considérer qu'il est en régime permanent. L'interrupteur K est alors ouvert (l'instant d'ouverture est alors considéré comme l'instant initial, $t = 0$),



1. Reproduire sur votre copie le tableau ci-dessous.

Grandeur	$t \to 0^-$	$t \to 0^+$
$i(t)$		
$v(t)$		
$x(t)$		

En justifiant vos réponses, compléter ce tableau, qui décrit comment se fait la transition à $t = 0$ pour différentes grandeurs mises en jeu dans le circuit. $t \to 0^-$ signifie que t tend vers zéro par valeurs négatives et $t \to 0^+$ par valeurs positives.

2. Ecrivez pour toute valeur de t postérieure à l'ouverture de K l'équation différentielle en $i(t)$, puis donnez l'équation différentielle en $v(t)$.

3. On pose que la résistance R_1 en série avec le condensateur C est précisément égale à la résistance de la bobine d'inductance L, R_2.
   3.1. Si R_1 avait une valeur nulle, déterminez complètement la solution de l'équation différentielle en $v(t)$. On fera intervenir la pulsation ω_o que vous exprimez en fonction de L et de C.
   3.2. On a $R_1 \neq 0$. Montrez en écrivant l'équation caractéristique qu'il est une valeur particulière de R_1, à L et C données, conférant à cette équation une racine double.

3.3. Soit R_c, cette valeur de R_1 : réorganisez l'écriture de l'équation différentielle afin d'exprimer les coefficients des dérivées de $v(t)$ en fonction exclusivement de ω_o et du rapport $m = \dfrac{R_1}{R_c}$.

4. On se propose d'écrire l'équation différentielle du circuit en prenant une variable réduite définie par $\tau = \omega_o t$. Les dérivées mises en jeu dans l'équation différentielle devront dorénavant être des dérivées successives de v par rapport à τ. Déterminez ainsi la nouvelle équation différentielle régissant les évolutions de $v(t)$.

5. On définit la valeur numérique suivante : $m = 1$.
   Avec la valeur numérique proposée, écrivez l'équation différentielle en v.
   Déterminer la forme de la solution $v(\tau)$ puis celle de $v(t)$.
   Déterminer entièrement $v(t)$ en utilisant les valeurs initiales à $t \to 0^+$ prélevées dans les résultats de la question (1) compte tenu de la valeur de m.

Exercice 2. Oscillateur amorti. Facteur de qualité.

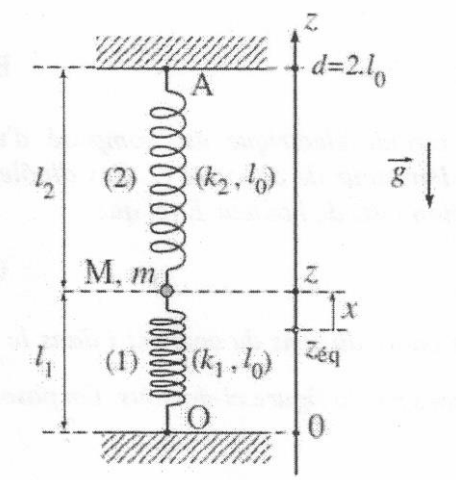
On travaille dans le référentiel terrestre $\Re_T$ supposé galiléen avec la verticale Oz ascendante.

On accroche un solide sphérique (de rayon r, de masse m, de centre de gravité M repéré par la cote z) entre deux ressorts verticaux dont les extrémités fixes sont distantes de $d = 2l_o$.

Les deux ressorts ont la même longueur à vide l_o.

La constante de raideur du ressort inférieur est k_1 et celle du ressort supérieur est k_2.

On note g le champ de pesanteur.



On tient compte des frottements car la masse évolue dans un fluide visqueux qui exerce une force de freinage du type $\vec{f} = -h\vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse de M dans $\Re_T$.

1. Etablir l'équation différentielle vérifiée par x et l'écrire sous la forme :
   $$\ddot{x} + \frac{\omega_o}{Q}\dot{x} + \omega_o^2 x = 0.$$
   On identifiera la pulsation propre ω_o et Q le facteur de qualité. Si vous n'arrivez pas à déterminer cette équation différentielle vous pouvez passer directement à la question 2.

2. Etablir la condition sur Q pour que le régime libre de cet oscillateur harmonique amorti soit pseudopériodique.
   Les oscillations sont alors de la forme : $x(t) = (A\cos\omega t + B\sin\omega t)e^{-\alpha t}$
   Exprimer ω (pseudo-pulsation) et α en fonction de ω_o et Q.

On considère que l'oscillateur harmonique amorti est caractérisé par une pulsation propre ω_o = 100 rad.s^{-1} et un facteur de qualité Q = 10 ; la masse m = 100 g de cet oscillateur est lâchée avec un écart à la position d'équilibre de x_o = 10 cm sans vitesse, initiale.

3. Déterminer les constantes d'intégration A et B en fonction de x_o, α et ω.

4. Calculer la pseudo-période T, la constante de raideur $k = k_1 + k_2$ et le coefficient h. Applications numériques.

5. Déterminer la relation entre la position à l'instant t et la position ultérieure au bout de n pseudo-période, c'est-à-dire, pour un entier naturel n quelconque, la relation entre $x(t+nT), x(t), n, \alpha$ et T.

   En déduire le décrément logarithmique $\delta = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{x(t)}{x(t+nT)}\right)$ en fonction de α et T, puis en fonction de Q seulement. Faire l'application numérique.

6. Déterminer le nombre n de pseudo-périodes au bout desquelles l'amplitude des oscillations est divisée par 17.