Optimisation d'une compression. Travail minimal.

1. Diagramme.

La pente de la compression isentropique est plus grande que celle de l'isotherme.

Lors de la compression adiabatique réversible (a) il y a augmentation de la température du gaz. En effet :

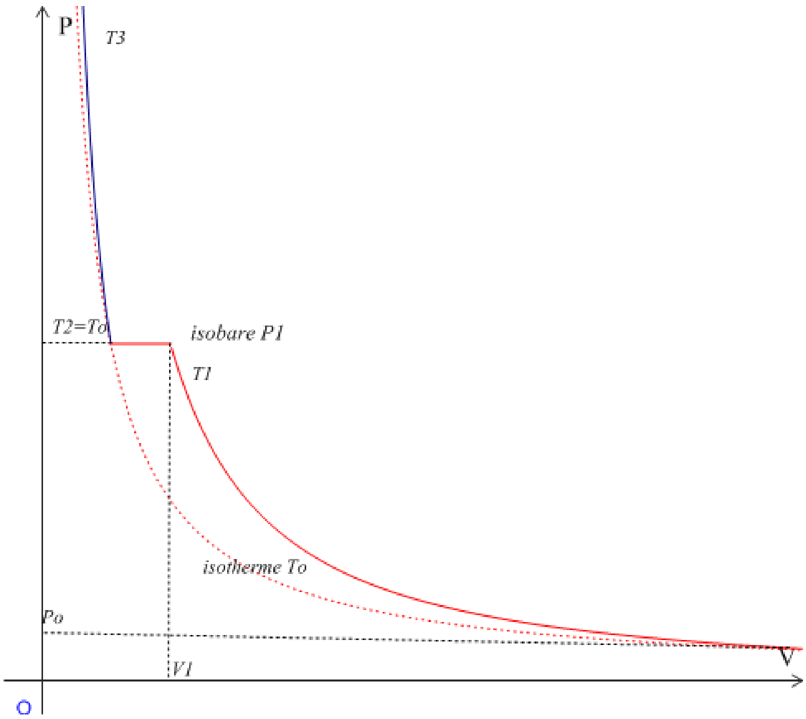
$$\Delta U_{adiabatique,réversible} = C_v \Delta T = W > 0 \;\Rightarrow T_1 > T_o$$

Lors de la transformation (b), isobare la température diminue car $T_2 = T_o < T_1$ d'autre part :

$$p_1 V_1 = nRT_1 \text{ et}$$

$$p_2 V_2 = p_1 V_2 = nRT_2 = nRT_o \quad \text{d'où :}$$

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_o} \Rightarrow V_2 = \frac{T_o}{T_1} V_1 < V_1$$ l'état (2) se situe donc à gauche de l'état (1)



2. Travail.

La variation d'énergie interne sur la transformation s'écrit :

$$\Delta U = nC_{Vm}\left(T_3 - T_o\right) = W_{total} + Q_{isobare} \quad \text{avec} \quad Q_{isobare} = nC_{Pm}\left(T_2 - T_1\right)$$

Comme : $C_{Vm} = \dfrac{R}{\gamma - 1}, C_{Pm} = \dfrac{\gamma R}{\gamma - 1}$ et $T_2 = T_o$ on obtient :

$$W_{total} = \frac{nR}{\gamma - 1}\left(T_3 - T_o\right) - \frac{nR\gamma}{\gamma - 1}\left(T_o - T_1\right)$$

$$W_{total} = \frac{mR}{M\left(\gamma - 1\right)}\left(\gamma T_1 + T_3 - \left(\gamma + 1\right)T_o\right)$$

Comme les transformations (a) et (c) sont adiabatiques, réversibles concernant un gaz parfait de coefficient γ constant, la relation de Laplace est alors applicable pour expliciter les températures T_1 et T_3 :

Pour la transformation (a) :

$$T_1^{\gamma} P_1^{1-\gamma} = T_0^{\gamma} P_0^{1-\gamma} \rightarrow T_1 = T_0 \left(\frac{P_0^{1-\gamma}}{P_1^{1-\gamma}} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$T_1 = T_0 \beta^{\frac{-1+\gamma}{\gamma}} = T_0 x$$

Pour la transformation (c) :

$$T_0^{\gamma} P_1^{1-\gamma} = T_3^{\gamma} P_3^{1-\gamma} \rightarrow T_3 = T_0 \left(\frac{P_1^{1-\gamma}}{P_3^{1-\gamma}} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$T_3 = T_0 \left(\frac{P_1^{1-\gamma}}{P_0^{1-\gamma}} \frac{P_0^{1-\gamma}}{P_3^{1-\gamma}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = T_0 \left(\beta^{1-\gamma} \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{1-\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$T_3 = T_0 \left(\beta^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \alpha^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right)$$

$$T_3 = \frac{T_0}{x} \alpha^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

On obtient ainsi l'expression du travail de compression :

$$\boxed{W = \frac{mR}{M(\gamma-1)} T_0 \left[\gamma x + \frac{\alpha^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{x} - (\gamma+1) \right]}$$

3. Travail minimal.

On recherche la valeur de x qui annule la dérivée de W par rapport à x :

$$\frac{dW}{dx} = 0 \rightarrow \gamma - \frac{\alpha^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{x^2} = 0$$

$$x^2 = \frac{\alpha^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{\gamma} \text{ or } x = \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

$$\boxed{P_1 = P_0 \left(\frac{\alpha^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{\gamma} \right)^{\frac{\gamma}{2(\gamma-1)}}}$$