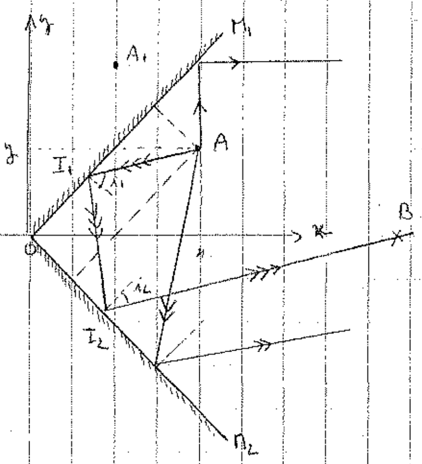
Association de deux miroirs plans à 90° l'un de l'autre (1/2)



1. Images.

$A(x,y) \xrightarrow{M_1} A_1(x_1=y,\ y_1=x)$

$A_1(y,x) \xrightarrow{M_2} A'(x'=-x,\ y'=-y)$

2. Images.

$A(x,y) \xrightarrow{M_2} A_2(x_2=-y,\ y_2=-x)$

$A_2(-y,-x) \xrightarrow{M_1} A''(x''=-x,\ y''=-y)$

3. A' et A''

A' et A'' sont identiques.

4. Transformation d'un vecteur.

Après deux réflexions, un vecteur se transforme en son symétrique par rapport au point O.

5. Réflexions.

Il n'y a qu'une seule réflexion si un rayon issu de A et réfléchi par un des deux miroirs ne rencontre pas l'autre.
C'est le cas pour les deux rayons représentés sur le schéma : les directions des rayons doivent s'écarter de la normale aux miroirs en s'éloignant du point O.
Dans les autres cas il y aura 2 réflexions et seulement deux car le rayon réfléchi par M_1 et M_2 revient en sens inverse suivant la même direction que le rayon incident (rayon $\rightarrow\!\!>\!\!>\!\!>$) :

$\hat{D} = (\overrightarrow{AI_1}, \overrightarrow{I_2B}) = (\overrightarrow{AI_1}, \overrightarrow{I_1I_2}) + (\overrightarrow{I_1I_2}, \overrightarrow{I_2B})$ déviation

$\hat{D} = (\pi - 2i_1) + (\pi - 2i_2)$

Or $\frac{\pi}{2} - i_1 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - i_2 = \pi$ dans le triangle I_1OI_2.

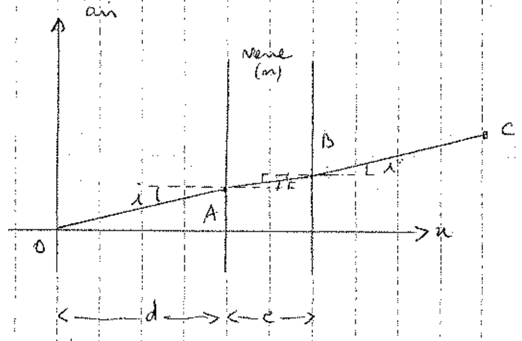
Association de deux miroirs plans à 90° l'un de l'autre (2/2)

D'où $\frac{\pi}{2} = i_1 + i_2 \Longrightarrow \hat{D} = \pi$

6. Individu

Une personne placée perpendiculairement au plan de la figure voit sa gauche à sa droite et inversement.
Il ne voit donc tel qu'il est vu par les autres.

Lames à faces parallèles



1. Paramètres a, b.

Nous avons $y = ax + b$ pour le rayon BC
a est la pente, on a donc $a = \tan i'$ or $n \sin r = \sin i'$ et $\sin i = n \sin r$ d'où : $i = i'$.

$$\boxed{a = \tan i}$$

Pour $x_B = d + e$; $y_B = d \tan i + e \tan r$
D'où :

$$d \tan i + e \tan r = \tan i\,(d+e) + b$$

$$\boxed{b = e(\tan r - \tan i)}$$

AN $i = 0$ $a = 0$, $b = 0$ car $r = 0$
$i = 45$ $a = 1$, $b = -0{,}465$ cm car $r = \arcsin\left(\frac{1}{n}\sin i\right) = 28{,}12°$.

2. da et db.

$$da = d(\tan i) = \frac{1}{\cos^2 i}\,di$$

$$db = e(d\tan r - d\tan i) = e\left(\frac{1}{\cos^2 r}\,dr - \frac{1}{\cos^2 i}\,di\right)$$

D'autre part comme $\sin i = n \sin r$, on obtient en différenciant

$$d(\sin i) = n\,d\sin r \longrightarrow \cos i\,di = n \cos r\,dr$$

$$\longrightarrow dr = \frac{1}{n}\frac{\cos i}{\cos r}\,di.$$

$$db = e\left(\frac{1}{n}\frac{\cos i}{\cos^3 r}\,di - \frac{1}{\cos^2 i}\,di\right)$$

AN $i = 0 \rightarrow r = 0$ $da = di = 0{,}0349$ rad ; $db = e\left(\frac{1}{n} - 1\right)di = -0{,}012$ cm
$i = 45 \rightarrow r = 28{,}12°$ $da = 2di = 0{,}0698$ rad
$db = -0{,}0458$

3. Coordonnées.

Pour le rayon BC associé à i, $y = ax + b$
" B'C' " $i + di$, $y' = (a+da)x + (b+db)$.
L'intersection des 2 rayons se fait en O', de coordonnées $x_{O'}$ et $y_{O'}$ telles que :

$$a x_{O'} + b = (a+da)x_{O'} + b + db$$

$$\rightarrow da\,x_{O'} + db = 0$$

$$x_{O'} = -\frac{db}{da} = -e\left(\frac{1}{n}\frac{\cos i}{\cos^3 r}\,di - \frac{1}{\cos^2 i}\,di\right) \times \frac{\cos^2 i}{di}$$

$$\boxed{x_{O'} = e\left(1 - \frac{1}{n}\left(\frac{\cos i}{\cos r}\right)^3\right)}$$ indépendant de di

$$y_{O'} = (a+da)x_{O'} + (b+db) = a x_{O'} + b + \underbrace{da\,x_{O'} + db}_{0}$$

$$\boxed{y_{O'} = a x_{O'} + b}$$ indépendant de di

AN . $i = 0$, $r = 0$; $a = 0$, $b = 0$ $x(O') = e\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 0{,}33$ cm
$y_{O'} = 0$

. $i = 45°$, $r = 28{,}12°$ $a = 1$, $b = -0{,}465$ cm
$x_{O'} = 0{,}656$ cm
$y_{O'} = 0{,}191$ cm

4. Observation.

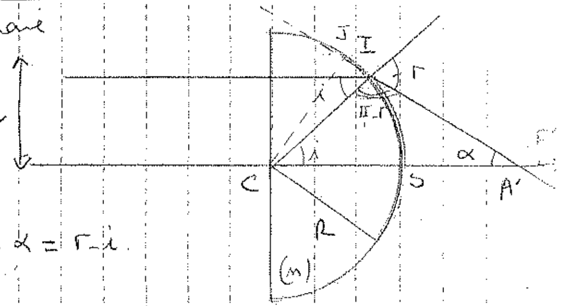
- observation normale $i=0$
  les rayons incidents issus du point O sont perçus par l'oeil s'ils se trouvent dans un cône de demi-angle au sommet inférieur à 5°. Nous nous trouvons dans dans les conditions de la question précédente, on a alors :
  $x = 0{,}33$ cm, $y = 0$ cm pour le point O'.

- observation à 45° :
  On peut observer les rayons si $40° < i < 50°$
  $x = 0{,}656$ cm / $y = 0{,}151$ cm.

Etude d'une aberration géométrique

1. Relation portant sur CA'

On trace le perpendiculaire CJ à IA'.
On considère le triangle rectangle CJA' :



$\sin\alpha = \dfrac{CJ}{CA'}$ or $\alpha = r - i$

$CA' = \dfrac{CJ}{\sin(r-i)}$ et $\sin r = \dfrac{CJ}{R}$

$CA' = R\,\dfrac{\sin r}{\sin(r-i)}$

Dans le cas où i et r sont petits r-i est aussi petit et on a donc :
$\sin r \simeq r$; $\sin(r-i) \simeq r-i$
La relation de Snell-Descartes donne $ni = r$.
D'où :

$CF' = R\,\dfrac{ni}{ni-i}$

$$\boxed{CF' = R\,\frac{n}{n-1}}$$

2. Valeur limite de d_0.

Il a présence d'un rayon réfracté si $n \sin i < 1$ soit
$\sin i \leqslant \dfrac{1}{n}$ or $\sin i = \dfrac{d}{R} \Rightarrow \dfrac{d}{R} \leqslant \dfrac{1}{n}$

$$\boxed{d < d_0 = \frac{R}{n}}$$

AN $d_0 = 3{,}33$ cm

3. Valeurs numériques de la distance CA'

$i = \arcsin\left(\frac{d}{R}\right)$; $r = \arcsin\left(n \sin i\right)$

d (cm)	i (rad)	r (rad)	CA' (cm)
0	0	0	15
0,5	0,10	0,15	14,9
1	0,20	0,30	14,55
1,5	0,30	0,47	13,9
2	0,41	0,64	13

4. Développement limité

$$CA' = \frac{R \sin r}{\sin(r-i)} = R \frac{\sin r}{\sin r \cos i - \cos r \sin i}$$

$$CA' = R \frac{n \sin i}{n \sin i \cos i - \cos r \sin i} = \frac{nR}{n \cos i - \cos r}$$

$$CA' = \frac{nR}{n\left(1 - \frac{i^2}{2}\right) - \left(1 - \frac{r^2}{2}\right)} = \frac{nR}{n\left(1 - \frac{i^2}{2}\right) - \left(1 - \frac{n^2 i^2}{2}\right)}$$

$$CA' = \frac{nR}{n - 1 - n\frac{i^2}{2} + n^2\frac{i^2}{2}} = \frac{nR}{(n-1)\left(1 + n\frac{i^2}{2}\right)}$$

$$CA' = \frac{nR}{(n-1)}\left(1 - n\frac{i^2}{2}\right)$$

L'approximation de Gauss consiste à négliger les termes du second ordre compte tenu du résultat de la question 1.

5. Distance A'F' maximale

$A'F' = CF' - CA'$

Cette distance croît avec l'angle i donc avec d et est donc maximale pour $d = d_0$.

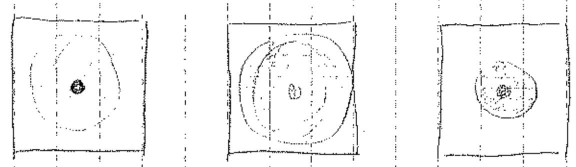
Dans ce cas i n'est plus petit et il faut donc exprimer CA' en prenant la relation avant le développement limité :

$$CA' = \frac{nR}{n \cos i - \cos r} \quad \text{or pour } d = d_0 \quad r = \frac{\pi}{2} \text{ et } \sin i = \frac{1}{n}$$

$$CA' = \frac{nR}{n \cos i} = \frac{R}{\sqrt{1 - \sin^2 i}} = \frac{R}{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{1/2}} = \frac{nR}{(n^2-1)^{1/2}}$$

$$\boxed{A'F' = \frac{nR}{n-1} - \frac{nR}{(n^2-1)^{1/2}}} \qquad A'F' = 8{,}3\text{ cm}.$$

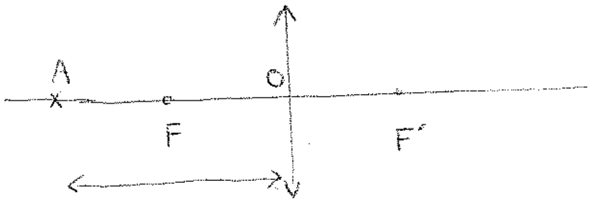
6. Aspect.



F' — A'F'max — A'F'max/2

Détermination de la vergence d'une lentille mince

(A) (1) (a)



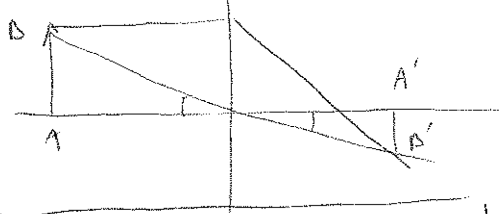
$A'B'$ image réelle $\Rightarrow |p| > f'$

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \qquad \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{f'} = -\frac{1}{p} + \frac{1}{f'} \qquad \overline{OA} = -p$$

$$= \frac{p-f'}{pf'}$$

$$\overline{OA'} = \frac{pf'}{p-f'} \qquad \overline{AA'} = \overline{AO} + \overline{OA'} = p + \frac{pf'}{p-f'} = \frac{p^2}{p-f'} \qquad \boxed{D(p) = \frac{p^2}{p-f'}}$$

(b)



$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

$$\boxed{\gamma = -\frac{pf'}{(p-f')p} = -\frac{f'}{p-f'}}$$

$$-\frac{\frac{1}{C}}{p-\frac{1}{C}} = -\frac{1}{pC-1}$$

$$D(p) = \frac{p^2}{p-\frac{1}{C}} = \frac{Cp^2}{Cp-1}$$

(c)

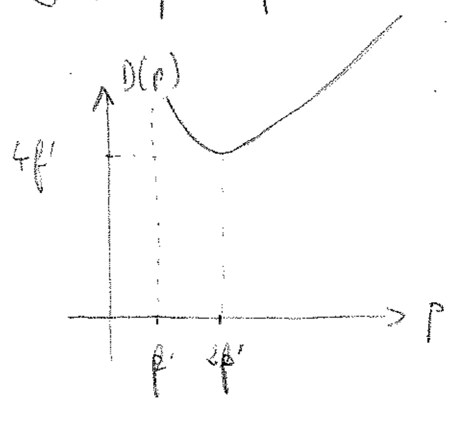
$$\frac{dD}{dp} = \frac{2p(p-f')-p^2}{(p-f')^2} \qquad \frac{dD}{dp} = 0 \Longleftrightarrow 2(p-f')-p = 0$$

$$\Longleftrightarrow p = 2f'$$

pour $p = 2f'$ $\quad D(p) = 4f'$

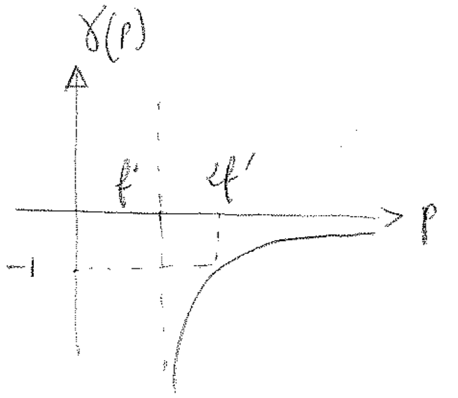
pour $p \to \infty$ $\quad D(p) \to \infty$

– $p = f'$ $\quad D(p)$ non définie.

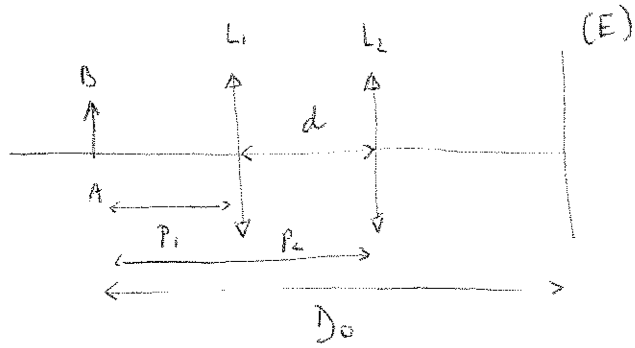


$$\gamma = -\frac{f'}{p-f'} \qquad \frac{d\gamma}{dp} = +f'\frac{1}{(p-f')^2}$$

Comme $|p| > f' \Rightarrow \frac{d\gamma}{dp} > 0$ $\triangle$ $\gamma(p)$ non définie en $p = f'$



(2)



$D_0 > 4f'$

(a) $D_0 = \frac{p^2}{p-f'} \longrightarrow p^2 - D_0 p + D_0 f' = 0$

$$p = \frac{D_0 \pm \sqrt{D_0^2 - 4D_0 f'}}{2}$$

$$p_1 = \frac{1}{2}\left(D_0 + \sqrt{D_0(D_0 - 4f')}\right) \qquad p_2 = \frac{1}{2}\left(D_0 - \sqrt{D_0(D_0-4f')}\right)$$

(b) $d = p_1 - p_2 = \sqrt{D_0(D_0 - 4f')}$

$$d^2 = D_0^2 - 4f'D_0 \Rightarrow f' = \frac{D_0^2 - d^2}{4D_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{C = \frac{4D_0}{D_0^2 - d^2}}$$

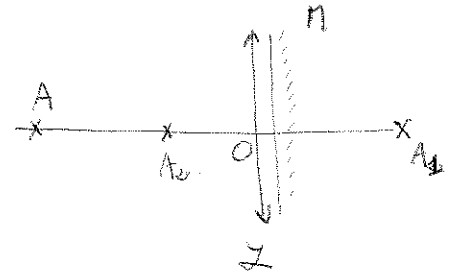
La plus grande vergence mesurée correspond au cas où $d = 0$

$$\Rightarrow \boxed{C_{max} = \frac{4}{D_0}}$$

③ $\gamma = -1$ pour $p = 2f' \Rightarrow D(2f') = 4f' = D_1$

$f' = \dfrac{D_1}{4} \longrightarrow C' = \dfrac{4}{D_1}$

Ⓑ ④



$A \xrightarrow{L} A_1 \xrightarrow{M} A_2 \xrightarrow{L} A'$

$\overline{OA_1} = \dfrac{pf'}{p-f'} \longrightarrow \overline{OA_2} = -\dfrac{pf'}{p-f'}$

⚠ La lumière réfléchie sur M retraverse L en sens inverse d'où :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA_2}} = -\frac{\cancel{1}}{\cancel{f'}}$$

$$\frac{1}{\overline{OA'}} + \frac{p-f'}{pf'} = -\frac{1}{f'} \longrightarrow \frac{1}{\overline{OA'}} = -\frac{1}{f'} - \frac{p-f'}{pf'} = \frac{-2p+f'}{f'p}$$

$$\overline{OA'} = -\frac{f'p}{2p-f'}$$

$$\delta = \overline{AA'} = \overline{OA'} - \overline{OA} = -\frac{f'p}{2p-f'} - (-p)$$

$$\boxed{\delta = \frac{2p(p-f')}{2p-f'}}$$

⑤ $\delta = 0 \Rightarrow p = f'$

$$\Rightarrow \boxed{C = \frac{1}{p_0} = \frac{1}{f'}}$$

c) Applications -

(*) $D_o = 90\,cm$, $d = 30\,cm$.

$$C = \frac{4 \times 90 \times 10^{-2}}{(90^2 - 30^2)\,10^{-4}} = 5\,\delta.$$

(*) $D_o = 150\,cm$ $\gamma = -2$.

$$2 = \frac{f'}{p - f'} \longrightarrow 2p - 2f' = f'.$$

$$p = \frac{3}{2} f'$$

$$\text{or } D_o = \frac{p^2}{p - f'} \longrightarrow D_o\,p - D_o f' = p^2.$$

$$D_o \frac{3}{2} f' - D_o f' = \frac{9}{4} f'^2.$$

$$D_o = \frac{9}{2} f'$$

$$\frac{1}{f'} = \frac{9}{2 D_o} = 3\,\delta$$