1 Poisson rouge dans un aquarium.

1. Valeurs des angles.

loi de Snell-Descartes :

$i_2 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin i_1\right)$ $\qquad i_2 = 28,65°$

$i_3 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_3}\sin i_1\right)$ $\qquad i_3 = 32,7°$

2. Phénomène de réflexion totale pour les rayons pénétrant dans l'aquarium.

Pour le dioptre air-verre, il ne peut y avoir de réflexion totale car $n_2 < n_1$. Par contre pour le dioptre verre-eau il y a possibilité de réflexion totale. Pour que ce phénomène ait lieu, il faut que $i_1 > i_{1L}$ tel $n_1 \sin i_{1L} = n_3$

soit $\sin i_{1L} = 1,33$ ce qui est impossible

→ Quelque soit i_1, les angles i_2 et i_3 existent.

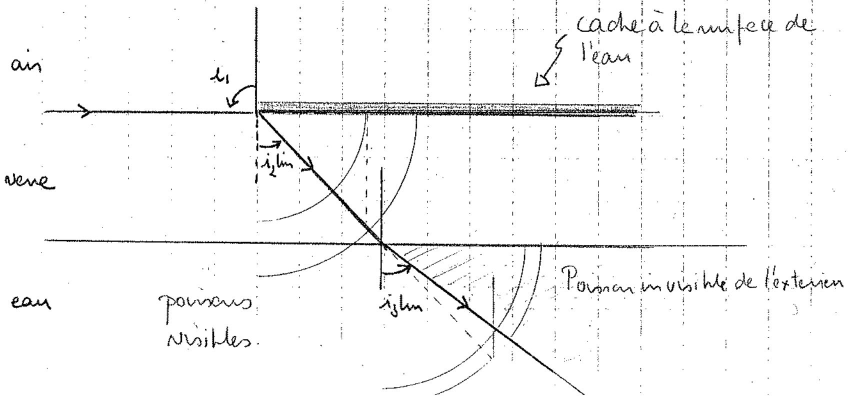
Les limites de ces angles (pour $i_1 = 90°$) sont :

$\sin i_{2\,lim} = \frac{n_1}{n_2} \to i_2 \ lim = 42°$

$\sin i_{3\,lim} = \frac{n_1}{n_3} \to i_3 \ lim = 49°$

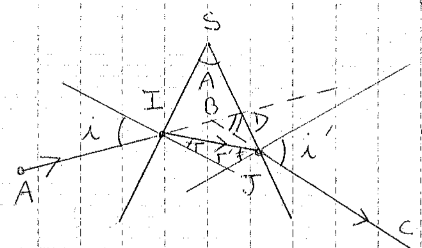
3. Phénomène de réflexion totale.

D'après le principe du retour inverse de la lumière, les rayons tels que $i_3 > i_{3lim}$ en incidence sur le dioptre eau-verre ne sortiront pas de l'aquarium.



2 - Mesure de l'indice d'un prisme

1 Relations entre les différents angles.



• Relation de Snell-Descartes

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin i = n \sin r \\ n \sin r' = \sin i'\end{array}}$$

• Triangle ISJ

$A + \left(\frac{\pi}{2} - r\right) + \left(\frac{\pi}{2} - r'\right) = \pi$

$\boxed{A = r + r'}$

2. Déviation

$D = (\vec{AB}, \vec{BJ})$

$D = (\vec{AB}, \vec{IJ}) + (\vec{IJ}, \vec{BJ})$

$D = (i - r) + (i' - r')$

$D = i + i' - (r + r')$

$\boxed{D = i + i' - A}$

3. Minimum de déviation

$\frac{dD}{di} = 1 + \frac{di'}{di}$

Or $\frac{d\sin i}{di} = n \frac{d\sin r}{dr}\frac{dr}{di} \longrightarrow \cos i = n \cos r \frac{dr}{di}$

$n \frac{d\sin r'}{dr'}\frac{dr'}{di'} = \cos i' \longrightarrow \cos i' = n \cos r' \frac{dr'}{di'}$

D'autre part $\frac{dA}{di} = \frac{dr}{di} + \frac{dr'}{di} = 0$

$\frac{dr}{di} = -\frac{dr'}{di'}\frac{di'}{di}$

On obtient $\frac{1}{n}\frac{\cos i}{\cos r} = -\frac{1}{n}\frac{\cos i'}{\cos r'}\frac{di'}{di}$

$\frac{di'}{di} = -\frac{\cos i \cos r'}{\cos r \cos i'}$

Comme on recherche le minimum de déviation, on a :

$$\frac{dD}{di} = 1 + \frac{di'}{di} = 0 \Rightarrow \frac{di'}{di} = -1$$

Alors : $\frac{\cos i \cos r'}{\cos r \cos i'} = 1 \quad \cos i \cos r' = \cos i' \cos r$

On élève au carré, et on transforme

$$(1-\sin^2 i)(1-\sin^2 r') = (1-\sin^2 i')(1-\sin^2 r)$$

On utilise les relations de Descartes pour éliminer r et r'

$$(1-\sin^2 i)\left(1-\frac{1}{n^2}\sin^2 i'\right) = (1-\sin^2 i')\left(1-\frac{1}{n^2}\sin^2 i\right)$$

En développant on obtient $\sin^2 i' = \sin^2 i$. Soit

$$\boxed{i = i'}$$

4_ Relation

Si $i = i'$ alors $r = r'$ et $A = 2r$.

Comme

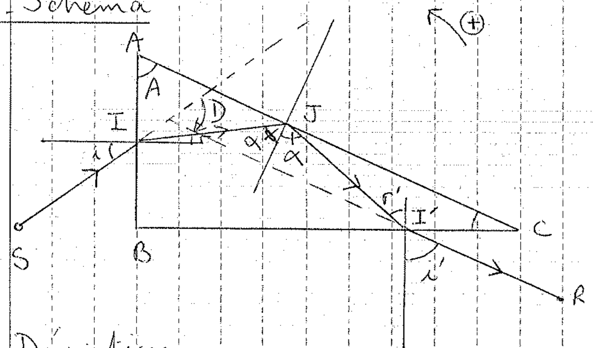
$$\boxed{n = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\sin\left(\frac{A+D_m}{2}\right)}{\sin \frac{A}{2}}}$$

5_ Application numérique

$n = 1{,}59$

3_ Prisme à déviation $\pi/2$

1_ Schéma



2_ Déviation

$$D = (\vec{SI}, \vec{I'R}) = (\vec{SI}, \vec{IB}) + (\vec{IB}, \vec{BI'}) + (\vec{BI'}, \vec{I'R})$$

$$D = -\left(\frac{\pi}{2} + i\right) + \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - i'\right)$$

$$\boxed{D = i' - i - \frac{\pi}{2}}$$

3_ Condition sur $\hat{A}$

On veut $D = -\frac{\pi}{2}$ d'où $i = i'$

Or $\sin i = n \sin r$ et $n \sin r' = \sin i'$ d'où :

$r = r'$

D'autre part : • $A + \left(\frac{\pi}{2} - r\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \pi$

(a) $A = r + \alpha$

• $C + \left(\frac{\pi}{2} + r'\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \pi$

(b) $C = -r' + \alpha = \alpha - r$

• $A + C = \frac{\pi}{2} = 2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

(a) - (b) :

$r + r' = A - C$

(c) $r + r' = 2A - \frac{\pi}{2}$

$dr = -dr'$

L'expression de r est alors

$$r = A - \pi/4.$$

En utilisant la relation de Snell-Descartes :

$\sin i = n \sin r = n \sin(A - \pi/4)$

$$\boxed{i = \arcsin\left(n \sin\left(A - \pi/4\right)\right)}$$

$A = \frac{\pi}{3}$ $i \simeq 24^\circ$ $r = r' = 15^\circ$ $\alpha = 45^\circ$

4.a. Pouvoir dispersif.

On a $A = cte$ et $i = cte$

(1) $\sin i = n \sin r \longrightarrow d\sin i = 0 = dn \sin r + n \cos r\, dr$

(2) $\sin i' = n \sin r' \longrightarrow \cos i' di' = dn \sin r' + n \cos r' dr'$

Or $i = i'$ et $r = r' = A - \frac{\pi}{4}$

(2) → (3) $di' = dn \frac{\sin r'}{\cos i'} + n \frac{\cos r'}{\cos i'} dr' = dn \frac{\sin r}{\cos i} + n \frac{\cos r}{\cos i} dr'$

(1) → (4) $dr = -\frac{dn}{n} \tan r = -dr'$

(4) → (3) $di' = dn \frac{\sin r}{\cos i} + dn \frac{\cos r}{\cos i} \tan r$

$di' = 2 \frac{\sin r}{\cos i} dn$

$$\frac{di'}{dn} = 2 \frac{\sin r}{\cos i} = \frac{\sin(A - \pi/4)}{\left(1 - n^2 \sin^2\left(A - \frac{\pi}{4}\right)\right)^{1/2}}$$

4.b. Angle extrême

Le pouvoir dispersif est $\frac{di'}{dn} = 0{,}57\,\mathrm{rd}$.

$di' = 8{,}5\,10^{-4}\,\mathrm{rd}$

Le rayon tourne dans le sens d'une plus grande déviation.

4. Arc en ciel.

1. Réflexion totale en B ?

Il peut y avoir réflexion totale quand la lumière passe d'un milieu plus réfringent à un milieu moins réfringent si l'angle d'incidence i est supérieur à λ tel que $\sin \lambda = \frac{n_2}{n_1}$. Soit en B $\sin \lambda = \frac{1}{n}$

En B il y a réflexion totale si $r > \lambda$ (OAB isocèle)

Or en A $i < \frac{\pi}{2} \Rightarrow r < \lambda$ car

$$\sin r = \frac{\sin i}{n} < \frac{1}{n}$$

2. Angle α

$$\alpha = (\vec{x'A}, \vec{Cy}) = (\vec{x'A}, \vec{AB}) + (\vec{AB}, \vec{BC}) + (\vec{BC}, \vec{Cy})$$

$$\alpha = (i - r) + (\pi - 2r) + (i - r)$$

$\alpha = \pi + 2i - 4r$; $\alpha = \pi + 2i - 4\arcsin\left(\frac{\sin i}{n}\right)$

3. Dérivée

$\frac{d\alpha}{di} = 2 - 4\frac{dr}{di}$ or $\sin i = n \sin r$

$\cos i\, di = n \cos r\, dr$

$$\frac{dr}{di} = \frac{1}{n} \frac{\cos i}{\cos r} = \frac{1}{n} \frac{\cos i}{\left(1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}\right)^{1/2}}$$

$$\frac{d\alpha}{di} = 2 - 4 \frac{\cos i}{\left(n^2 - \sin^2 i\right)^{1/2}}$$

4. Extremum

$\frac{d\alpha}{di} = 0 \qquad \frac{\cos i}{(n^2 - \sin^2 i)^{1/2}} = \frac{1}{2}$

$4\cos^2 i = n^2 - \sin^2 i = n^2 - (1 - \cos^2 i)$

$\cos i = \left(\frac{n^2-1}{3}\right)^{1/2}$

$i_m = 59{,}6°$

$\alpha = 137{,}4°$

5. Variation $\Delta\alpha_m$

On a $\alpha = \pi + 2i - 4r$

$$\frac{d\alpha}{dn} = -4\frac{dr}{dn}$$

La loi de Snell - Descartes par l'en différence donne :

$\sin i = n \sin r \qquad d\sin i = 0 = dn \sin r + n\cos r\, dr$

D'où :

$$\frac{dr}{dn} = -\frac{1}{n}\tan r$$

$\frac{d\alpha}{dn} = +\frac{4}{n}\tan r$ comme $\Delta n \ll 1$ on peut écrire

$\Delta\alpha = 4\frac{\Delta n}{n}\tan r \qquad \Delta\alpha_m = 2{,}5\ 10^{-2}°$