SP.OL 1. Signaux de formes différentes

1_ Valeur efficace d'un signal sinusoïdal

On considère un signal sinusoïdal de la forme

$$s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Sa moyenne quadratique est :

$$\langle s^2(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T S_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi)\, dt$$

Comme $\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a)$ on peut écrire

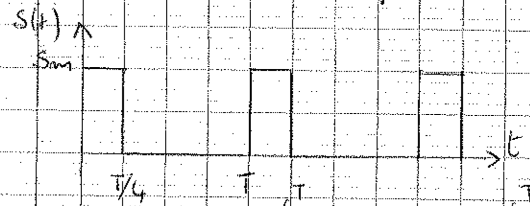
$$\langle s^2(t) \rangle = \frac{S_m^2}{2T} \int_0^T (1 + \cos 2(\omega t + \varphi))\, dt$$

$$= \frac{S_m^2}{2T} \left[\underbrace{\int_0^T dt}_{=T} + \underbrace{\int_0^T \cos 2(\omega t + \varphi)\, dt}_{=0} \right]$$

$\langle s^2(t) \rangle = \frac{S_m^2}{2}$ or $S_{eff} = \left(\langle s^2(t) \rangle \right)^{1/2}$ d'où

$$\boxed{S_{eff} = \frac{S_m}{\sqrt{2}}}$$

2_ Impulsions rectangulaires



$$\langle s^2(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T s^2(t)\, dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/4} S_m^2\, dt = \frac{1}{T} S_m^2 \frac{T}{4} = \frac{S_m^2}{4}$$

$$S_{eff} = \frac{S_m}{2}$$

Un tel appareil donnerait $S_{eff} = S_m/\sqrt{2}$ ce qui serait un résultat faux.
Pour un tel signal il faut utiliser un appareil effectuant la mesure RMS c'est-à-dire mesurant $\left(\langle s^2(t) \rangle \right)^{1/2}$.

SP.OL 2 Addition de signaux de même période

On considère $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$

1_ s(t) périodique ?

$$s(t+T) = s_1(t+T) + s_2(t+T) = s_1(t) + s_2(t) = s(t).$$

$s(t)$ est périodique.

2_ Valeur moyenne

$$\langle s(t) \rangle = S_{moy} = \frac{1}{T} \int_0^T (s_1(t) + s_2(t))\, dt = \frac{1}{T} \int_0^T s_1(t)\, dt + \frac{1}{T} \int_0^T s_2(t)\, dt$$

$$\langle s(t) \rangle = \langle s_1(t) \rangle + \langle s_2(t) \rangle$$

3_ Moyenne quadratique - Valeur efficace

Comme le carré de $s(t)$ n'est pas égal à la somme des carrés de $s_1(t)$ et de $s_2(t)$, l'additivité (en général) n'est pas vraie pour les moyennes quadratiques

$$\langle s^2(t) \rangle \neq \langle s_1^2(t) \rangle + \langle s_2^2(t) \rangle$$

L'additivité des valeurs efficaces n'est en général pas vérifiée.
Prenons l'exemple suivant :

$$s_1(t) = S_m \cos \omega t \ , \quad s_2(t) = -S_m \cos \omega t$$

On a $s(t) = 0$ et $S_{moy} = 0$, $S_{eff} = 0$

or $S_{1eff} = \frac{S_m}{\sqrt{2}}$ et $S_{2eff} = \frac{S_m}{\sqrt{2}}$

4 Signaux déphasés

$s_1(t) = S_{1m} \cos \omega t$; $s_2(t) = S_{2m} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = S_{2m} \sin \omega t$

$s_2(t)$ est en quadrature retard par rapport à $s_1(t)$

On a :

$$\langle s_1^2(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T S_{1m}^2 \cos^2 \omega t\, dt = \frac{1}{T} S_{1m}^2 \frac{1}{2} \int_0^T (1 + \cos 2\omega t)\, dt$$

$$\langle s_1^2(t)\rangle = \frac{1}{T} S_{1m}^2 \frac{1}{2}\left[\int_0^T dt + \int_0^T \cos(2\omega t)\,dt\right]$$

$$\langle s_1^2(t)\rangle = \frac{S_{1m}^2}{2}$$

De même on obtient

$$\langle s_2^2(t)\rangle = \frac{S_{2m}^2}{2}$$

Pour $s(t)$:

$$s^2(t) = (s_1^2 + s_2^2 + 2 s_1 s_2)$$

$$\langle s^2(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T (s_1^2 + s_2^2 + 2 s_1 s_2)\,dt = \frac{S_{1m}^2}{2} + \frac{S_{2m}^2}{2} + \frac{2}{T}\int_0^T s_1 s_2\,dt$$

$$\langle s^2(t)\rangle = \frac{S_{1m}^2}{2} + \frac{S_{2m}^2}{2} + \frac{2}{T} S_{1m} S_{2m}\int_0^T \cos\omega t \sin\omega t\,dt$$

$$\langle s^2(t)\rangle = \frac{S_{1m}^2}{2} + \frac{S_{2m}^2}{2} + \frac{2}{T} S_{1m} S_{2m} \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^T \sin(2\omega t)\,dt}_{=0}$$

On obtient ainsi

$$\boxed{\langle s^2(t)\rangle = \langle s_1^2(t)\rangle + \langle s_2^2(t)\rangle}$$

$$S_{eff} = \left(\langle s^2(t)\rangle\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{S_{1m}^2}{2} + \frac{S_{2m}^2}{2}}$$

$$\boxed{S_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{S_{1m}^2 + S_{2m}^2}}$$

SP013 Mesure de valeur moyenne

1 Intervalle.

Chaque valeur mesurée $s(t)$ appartient à l'intervalle $[S_0 - S_m, S_0 + S_m]$

2 Moyenne des valeurs. Intérêt

En prenant la moyenne des valeurs, il est possible qu'une compensation des termes d'ondulation, tantôt positifs, tantôt négatifs, s'effectue et ainsi obtenir S_0.
Néanmoins il n'est pas possible que la moyenne obtenue soit rigoureusement S_0

3. Traitement du signal

On a :

$$S_{mes} = \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} s(t)\,dt = \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} S_0\,dt + \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} s_a(t)\,dt$$

$$S_{mes} = S_0 + \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} s_a(t)\,dt$$

Si Δt est un multiple entier de la période T, le terme $\int_0^{\Delta t} s_a(t)\,dt$ s'annule car $s_a(t)$ a une valeur moyenne nulle

On a alors $S_{mes} = S_0$

4. Expression de S_{mes} en fonction de Δt

$$S_{mes} = S_0 + \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} S_m \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)dt = S_0 + \frac{S_m}{\Delta t}\frac{T}{2\pi}\left[\sin\frac{2\pi t}{T}\right]_0^{\Delta t}$$

$$S_{mes} = S_0 + \frac{S_m}{2\pi}\frac{T}{\Delta t}\sin\left(2\pi\frac{\Delta t}{T}\right) \quad \text{avec} \quad \left|\sin\left(2\pi\frac{\Delta t}{T}\right)\right| < 1.$$

le terme $\frac{S_m}{2\pi}\frac{T}{\Delta t}$ décroît lorsque Δt croît:

La valeur mesurée S_{mes} tend vers S_0 lorsque la durée de l'opération de moyennage augmente.

Propagation d'ondes sonores.

1.a Longueur d'onde.

$\lambda = \dfrac{c}{f}$ $\qquad \lambda = 0{,}34\,m$.

1.b Utilisation d'un oscilloscope

En mode monocourbe, en affichant seulement le signal du microphone, on ne peut pas mettre en évidence la propagation car on ne dispose pas de référence fixe par rapport à laquelle cette propagation se produit.
En mode bicourbe on envoie sur une voie la tension d'alimentation du haut-parleur et sur l'autre la tension délivrée par le microphone. En mesurant la distance entre deux positions successives du microphone pour lesquelles les deux signaux sont en phase avec le signal du haut-parleur on obtient la longueur d'onde.

2.a Forme de l'onde (HP de gauche)

le haut-parleur en O émet une onde progressive selon les x croissants:

$$\boxed{p_g(x,t) = p_0 \cos(\omega t - kx)}$$

2.b Forme de l'onde (HP de droite)

le haut-parleur en A émet une onde progressive selon les x décroissants

$$p_d(x,t) = p_0 \cos(\omega t + kx + \varphi)$$

L'amplitude p_0 est la même que l'onde précédente car les deux haut-parleurs sont alimentés par la même tension.
En $x = d$ la phase doit être égale à ωt. On a donc

$$\omega t + kd + \varphi = \omega t$$

↳ onde en phase avec le haut-parleur d'après le texte

$$\varphi = -kd$$

$$\boxed{p_d(x,t) = p_0 \cos(\omega t + k(x-d))}$$

2.c Superposition

On a $p(x,t) = p_g(x,t) + p_d(x,t) = p_0\left(\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + k(x\ldots\right.$

$$p(x,t) = 2p_0 \cos\left(\omega t - \frac{kd}{2}\right)\cos\left(kx - k\frac{d}{2}\right)$$

Pour avoir un noeud de vibration au niveau du haut-parleur de gauche, il faut que $p(0,t) = 0$
D'où:

$$\cos\left(\frac{kd}{2}\right) = 0 \rightarrow \frac{kd}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2} \qquad n \in \mathbb{N}$$

Comme $\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$ on obtient

$$\boxed{d = (2n+1)\frac{\lambda}{2}.}$$

2.d Cas du haut-parleur de droite.

Au niveau du haut-parleur de droite la pression est exactement la même. C'est aussi un noeud de vibration

2.e Ventre de vibration.

On veut que l'amplitude en $x=0$ soit maximale d'où:

$$\cos\frac{kd}{2} = \pm 1 \longrightarrow \frac{kd}{2} = n\pi$$

$$d = n\lambda$$

L'autre haut-parleur est aussi un ventre de vibration.
Quand les deux haut-parleurs sont séparés d'une distance égale à un nombre entier de longueurs d'onde, l'onde émise par un haut-parleur garde la même phase en arrivant sur l'autre haut-parleur. On parle d'interférences constructives

Tube à ondes stationnaires

1. Forme de l'onde

L'onde se propage selon les z croissants :

$$p_i = p_0 \cos(\omega t - kz)$$

2. Forme de l'onde réfléchie

$$p_r = p_0' \cos(\omega t + kz + \varphi)$$

3. Caractéristiques

L'onde totale a pour expression :

$$p = p_0 \cos(\omega t - kz) + p_0' \cos(\omega t + kz + \varphi)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = k\left(p_0 \sin(\omega t - kz) - p_0' \sin(\omega t + kz + \varphi)\right)$$

On a

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{z=0} = 0 \rightarrow p_0 \sin(\omega t) - p_0' \sin(\omega t + \varphi) = 0$$

Cela doit être vrai quelque soit la date et en particulier à la date $t=0$ d'où : $p_0' \sin\varphi = 0$

$\varphi = 0$ est une solution possible que l'on retient.
On trouve alors que $p_0' = p_0$

4. Onde stationnaire

$$p(z,t) = p_i(z,t) + p_r(z,t)$$

$$p(z,t) = p_0 \cos(\omega t - kz) + p_0 \cos(\omega t + kz)$$

$$p(z,t) = 2\, p_0 \cos(\omega t) \cos(kz)$$

L'onde est le produit d'une fonction du temps par une fonction dépendant de l'espace : c'est la "signature" d'une onde stationnaire.

5. Mesure de la longueur d'onde

Avec un microphone branché sur un oscilloscope on obtient un signal sinusoïdal en tout point.
En certains points l'amplitude est maximale (ventres).
On mesure la distance entre deux ventres qui est égale à la moitié de la longueur d'onde.

Corde excitée par un vibreur.

1. Conditions aux limites

En $x=0$, la vibration de la corde est imposée par le vibreur.

$$y(0,t) = z(t) = z_0 \sin\omega t$$

En $x=L$, la corde est fixée on a alors :

$$y(L,t) = 0$$

2. Nature de l'onde

C'est une onde stationnaire car les variables x et t sont séparées.

3. Constantes A, φ et ψ.

En $x=0$

$$y(0,t) = z_0 \sin\omega t = A \sin(\omega t + \varphi) \sin\psi$$

Cette égalité est vraie à toute date.
L'égalité entre deux sinus n'est vérifiée que s'ils sont en phase, soit $\varphi = 0$. De plus $z_0 = A\sin\psi$.

En $x=L$

$$y(L,t) = A\sin(\omega t)\sin(kL+\psi) = 0 \quad \text{soit :}$$

$$kL + \psi = p\pi \quad (p \in \mathbb{N}) \rightarrow \psi = p\pi - kL$$

D'où : $z_0 = A\sin(p\pi - kL) = -A\sin kL$

$$\sin(kx+\psi) = \sin(kx + p\pi - kL) = -\sin(k(x-L))$$

Ainsi : $$\boxed{y(x,t) = \frac{z_0}{\sin kL}\sin(\omega t)\sin(k(x-L))}$$

4. Modes propres.

L'amplitude devient très grande lorsque :

$$\sin(kL) = 0 \quad \text{soit} \quad kL = n\pi$$

Comme $k = \frac{\omega}{c}$ on a $\frac{\omega}{c}L = n\pi$ $\quad \omega = n\frac{\pi c}{L}$

L'onde est donc de la forme

$$y(x,t) = y_0 \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\sin(kx - \pi)$$

$$\boxed{y(x,t) = y_0 \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}$$

y_0 est l'amplitude "très grande". On retrouve l'expression du mode propre n.

5. Divergence de l'amplitude.

Dans cet exercice les pertes énergétiques dans la corde ont été négligées.
Le vibreur donne sans cesse de l'énergie à la corde qui la stocke sans perte.
L'énergie de la corde diverge ainsi que l'amplitude des oscillations.
En pratique les frottements limitent cette amplitude divergente.

Remarque : Dans le cours, en $x=0$, il y a un nœud de vibration alors que dans cet exercice $x=0$ est celle du vibreur qui excite la corde.
Comme l'amplitude des modes propres est infinie, l'excitation par le vibration est d'amplitude très faible en comparaison et est donc assimilable à un nœud de vibration. C'est pourquoi on retrouve les modes propres du cours.