SP.E4. Exercices. Corrigés.

SP.E4.1. Détermination d'un coefficient de viscosité.

1. Equation du mouvement - Pseudo-période

On étudie la sphère dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Ce système est soumis à :

- $\vec{P}$ son poids $\vec{P} = m\vec{g}$
- $\vec{F}$ force de frottement $\vec{F} = -6\pi\eta r \vec{v}$
- $\vec{T}$ tension du ressort $\vec{T} = -k\vec{VA}$ avec V : position à vide
- $\vec{A}$ poussée d'Archimède

A la date t, d'après la relation de la dynamique on a :

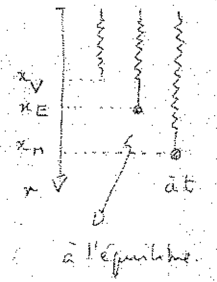
$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{T} + \vec{A} = m\vec{a}$$

La projection suivant $\vec{i}$, orienté verticalement vers le bas :

(1) $mg - 6\pi\eta r\dot{x} - k(x_n - x_v) + A_x = m\ddot{x}$

A l'équilibre :

(2) $mg - k(x_E - x_V) + A_x = 0$ car $\dot{x} = 0$ et $\ddot{x} = 0$



(1) - (2) donne :

$$-6\pi\eta r\dot{x} - k(x_n - x_E) = m\ddot{x}$$

En posant $X = x_n - x_E$ écart par rapport à la position d'équilibre

$$\boxed{\ddot{X} + \frac{6\pi\eta r}{m}\dot{X} + \frac{k}{m}X = 0}$$

Dans le cas d'un mouvement pseudo-périodique, le discriminant de l'équation caractéristique est négatif

$$\Delta = \left(\frac{6\pi\eta r}{m}\right)^2 - 4\omega_0^2 \quad \text{avec } \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Les solutions de l'équation caractéristique sont donc

$$s = -\frac{6\pi\eta r}{2m} \pm j\frac{1}{2}\left(4\omega_0^2 - \left(\frac{6\pi\eta r}{m}\right)^2\right)^{1/2}$$

On pose $\Omega = \frac{1}{2}\left(4\omega_0^2 - \left(\frac{6\pi\eta r}{m}\right)^2\right)^{1/2}$ pseudo-pulsation

La pseudo-période $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ a donc pour expression :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\left(\omega_0^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{6\pi\eta r}{m}\right)^2\right)^{1/2}} = \frac{2\pi}{\left(\frac{k}{m} - \left(\frac{3\pi\eta r}{m}\right)^2\right)^{1/2}}}$$

2. Coefficient de viscosité

Dans l'air l'équation différentielle du mouvement s'écrit donc

$$\ddot{X} + \frac{k}{m}X = 0 \quad \text{car } \eta = 0$$

Le mouvement est périodique de période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

L'expression de T permet d'écrire :

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{k}{m} - \left(\frac{3\pi\eta r}{m}\right)^2$$

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 - \left(\frac{3\pi\eta r}{m}\right)^2 \Rightarrow \frac{3\pi\eta r}{m} = \left(\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\right)^{1/2}$$

$$\boxed{\eta = \frac{2m}{3r}\left(\frac{1}{T_0^2} - \frac{1}{T^2}\right)^{1/2}}$$

SP.E4.2. Particule sur un cerceau avec frottements visqueux.

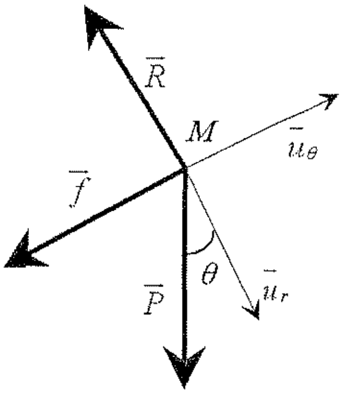
1. Equation différentielle.

On étudie le point M de masse m dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Les forces qui s'appliquent sur ce système sont :

$\vec{R}$ réaction du support

$\vec{P} = m\vec{g}$ poids su système

$\vec{f} = -bm\vec{v}$ force de frottement



On applique la seconde loi de Newton :

$$\vec{R} + m\vec{g} - bm\vec{v} = m\vec{a}$$

La projection de cette équation suivant $\vec{u}_\theta$ donne :

$$-mg\sin\theta - mbR\dot{\theta} = mR\ddot{\theta}$$

Dans le cas où l'angle θ est petit ; on a $\sin\theta \approx \theta$, d'où :

$$\boxed{\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + \frac{g}{R}\theta = 0}$$

2.a. Expression de *Rc*.

Le retour à la position d'équilibre s'effectue le plus rapidement lorsque le régime du système est critique ce qui correspond à une valeur nulle du discriminant de l'équation caractéristique.

$$r^2 + br + \frac{g}{R} = 0 \qquad \Delta = b^2 - 4\frac{g}{R}$$

$$\Delta = 0 \text{ si } b^2 = \frac{4g}{Rc}$$

$$\boxed{Rc = \frac{4g}{b^2}}$$

2.b. Equation horaire.

Dans le cas du régime critique la solution est de la forme :

$$\theta(t) = (A + Bt)\exp\left(-\frac{b}{2}t\right)$$

On détermine les constantes d'intégration A et B en utilisant les caractéristiques angulaires du système à l'état initial :

$$\theta(t=0) = \theta_o = A$$

D'autre part la vitesse angulaire a pour expression :

$$\dot{\theta}(t) = -\frac{b}{2}(A+Bt)\exp\left(-\frac{b}{2}t\right) + B\exp\left(-\frac{b}{2}t\right)$$

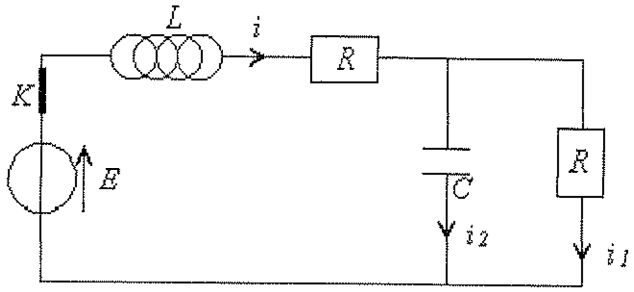
Comme à $t = 0$, $\dot{\theta}(t=0) = 0$ on obtient :

$$\dot{\theta}(t=0) = 0 = -\frac{b}{2}A + B \Rightarrow B = \frac{b}{2}A = \frac{b}{2}\theta_o$$

Finalement :

$$\boxed{\theta(t) = \theta_o\left(1+\frac{b}{2}t\right)\exp\left(-\frac{b}{2}t\right)}$$

SP.E4.3. Etude d'un circuit (*RL*, R//C) en régime transitoire.



On applique la loi des mailles :

(a) $$E = L\frac{di}{dt} + Ri + Ri_1$$

(b) $$E = L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C}$$

La dérivation de l'équation par rapport au temps permet d'obtenir l'expression de l'intensité i_1 :

(c) $$0 = L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i_2}{C} \quad \Rightarrow \quad i_2 = -LC\frac{d^2i}{dt^2} - RC\frac{di}{dt}$$

En appliquant la loi des nœuds et en injectant le résultat de (c) dans (a), on détermine l'expression de i :

$$E = L\frac{di}{dt} + Ri + Ri + RLC\frac{d^2i}{dt^2} + R^2C\frac{di}{dt}$$

On divise par R :

$$LC\frac{d^2i}{dt^2} + \left(RC + \frac{L}{R}\right)\frac{di}{dt} + 2i = \frac{E}{R}$$

Or :

$$LC = R^2C^2 = \tau^2 \qquad \tau = \frac{L}{R} = RC$$

On obtient l'équation différentielle suivante :

$$\tau^2\frac{d^2i}{dt^2} + 2\tau\frac{di}{dt} + 2i = \frac{E}{R}$$

Le discriminant de l'équation caractéristique de l'équation différentielle sans second membre est négatif :

$$\Delta = -4\tau^2$$

Les racines de l'équation caractéristique sont :

$$r_{1,2} = -\frac{1}{\tau} \pm j\frac{1}{\tau}$$

La solution particulière de l'équation différentielle avec second membre est :

$$i = \frac{E}{2R}$$

La solution générale de l'équation différentielle avec second membre est :

$$i = \frac{E}{2R} + e^{-t/\tau}\left(A\cos\frac{t}{\tau} + B\sin\frac{t}{\tau}\right)$$

Les conditions initiales permettent de déterminer les deux constantes d'intégration A et B :
A $t = 0$:

$i = 0$ La continuité du courant est assurée par la bobine.

$q = 0$ et $i = 0$ $\Rightarrow (b) \quad E = \left(L\frac{di}{dt}\right)_{t=0}$

On obtient :

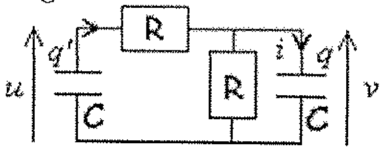
$$i = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{E}{2R}$$

$$E = \left(L\frac{di}{dt}\right)_{t=0} = L\left(-\frac{A}{\tau} + \frac{B}{\tau}\right) \quad \Rightarrow \quad B = \frac{E\tau}{L} + A = \frac{E\tau}{L} - \frac{E}{2R} = \frac{E}{R} - \frac{E}{2R} = \frac{E}{2R}$$

L'équation vérifiée par i est :

$$\boxed{i = \frac{E}{2R}\left(1 + e^{-t/\tau}\left(\sin\frac{t}{\tau} - \cos\frac{t}{\tau}\right)\right)}$$

SP.E4.4. Etude du circuit de Wien en régime transitoire.



1. Equation différentielle.

On applique la loi des mailles :

$$u = Ri' + v$$

En dérivant par rapport au temps :

$$\frac{du}{dt} = R\frac{di'}{dt} + \frac{dv}{dt} \qquad \text{(a)}$$

Or :

$$i' = \frac{v}{R} + C\frac{dv}{dt} \qquad \text{(b)}$$

$$u = \frac{q'}{C} \quad \Rightarrow \quad i' = -C\frac{du}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dt} = -\frac{i'}{C}$$

La dérivée par rapport au tempsde la tension u a pour expression :

$$\frac{du}{dt} = -\left(\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC}\right) \qquad \text{(c)}$$

En injectant les équations (b) et (c) dans (a), on obtient :

$$\boxed{\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{3}{\tau}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau^2}v = 0}$$

2. Expression de *v(t)*.

Le discriminant de l'équation caractéristique est :

$$\Delta = \frac{5}{\tau^2} > 0$$

Les solutions de l'équation caractéristique sont :

$$r_{1,2} = -\frac{3}{2\tau} \pm \frac{\sqrt{5}}{2\tau}$$

La tension v a pour expression :

$$v = A \exp r_1 t + B \exp r_2 t$$

Les conditions initiales permettent de déterminer les constantes d'intégration A et B :

$$v(0) = 0 = A + B$$

D'autre part :

$u = Ri' + v$ et

$$i' = \frac{v}{R} + C\frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad u = RC\frac{dv}{dt} + 2v$$

Cette dernière équation s'écrit à $t = 0$, sachant que $v(0) = 0$:

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=0}=\frac{u(0)}{\tau}$$

Soit :

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=0}=\frac{u(0)}{\tau}=Ar_1+Br_2=A(r_1-r_2)=\frac{\sqrt{5}}{\tau}A$$

$$A=-B=\frac{u(0)}{\tau}$$

L'équation vérifiée par la tension v s'écrit :

$$v(t)=\frac{u(0)}{\sqrt{5}}\exp\left(-\frac{3}{2\tau}t\right)\left(\exp\frac{\sqrt{5}}{2\tau}t-\exp-\frac{\sqrt{5}}{2\tau}t\right)$$

3. Date du maximum.

A la date t_m la tension $v(t)$ passe par un maximum, on a alors :

$$\frac{dv}{dt}=0 \quad\Rightarrow\quad A(r_1\exp r_1t_m-r_2\exp r_2t_m)=0$$

On obtient :

$$\boxed{t_m=\frac{\ln\frac{r_1}{r_2}}{r_2-r_1}}$$

$t_m = 0{,}86$ ms

SP.E4.5. Etude d'une réponse en tension.

1. Equation différentielle vérifiée par *u*.

Le réseau présente trois branches et deux nœuds. Il y a donc deux inconnues à déterminer, deux équations sont alors nécessaires pour déterminer l'équation différentielle demandée.

$$E=\frac{q}{C}+u \qquad (1)$$

$$i=\frac{u}{R}+\frac{1}{L}\int udt+cste \qquad (2)$$

La dérivation par rapport au temps de l'équation (1) donne :

$$0=\frac{i}{C}+\frac{du}{dt} \qquad (3)$$

L'équation (2) donne l'expression de i que l'on injecte dans (3) :

$$0=\frac{u}{RC}+\frac{1}{LC}\int udt+cste+\frac{du}{dt} \quad (4)$$

En dérivant (4) par rapport au temps on obtient :

$$0=\frac{1}{RC}\frac{du}{dt}+\frac{1}{LC}u+\frac{d^2u}{dt^2}$$

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{1}{\tau}\frac{du}{dt}+\omega_o^2u=0 \qquad (5)$$

2. Détermination de *u*.

L'équation caractéristique de (5) s'écrit :

$$r^2+\frac{1}{\tau}r+\omega_o^2=0$$

Le discriminant a pour expression :

$$\Delta=\frac{1}{\tau^2}-4\omega_o^2$$

Dans le cas où $\omega_o>\frac{1}{2\tau}$, ce discriminant est négatif. La tension u a alors pour expression :

$$u=e^{-\frac{t}{2\tau}}\left(A\cos\Omega t+B\sin\Omega t\right)\quad(6)$$

$$\text{avec } \Omega=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}=\sqrt{\omega_o^2-\frac{1}{4\tau^2}}$$

Les conditions initiales permettent de déterminer les deux constantes d'intégration.

Il y a continuité de la charge d'un condensateur :

$$q\left(0^-\right)=q\left(0^+\right)=0$$

Compte tenu de ce résultat, l'équation (1) s'écrit à la date $t=0^+$ de la manière suivante :

$$E=\frac{q\left(0^+\right)}{C}+u\left(0^+\right)=0+u\left(0^+\right)\text{ soit :}$$

$$u\left(0^+\right)=E=A$$

Pour déterminer B on étudie la dérivée temporelle de u à la date $t=0^+$:

$$\frac{du}{dt}=e^{-\frac{t}{2\tau}}\left(-\frac{1}{2\tau}\left(A\cos\Omega t+B\sin\Omega t\right)+\Omega\left(-A\sin\Omega t+B\cos\Omega t\right)\right)$$

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{t=0^+}=\left(-\frac{1}{2\tau}A+\Omega B\right)$$

A la date $t=0^+$ l'équation (3) s'écrit :

$$0=\frac{i\left(0^+\right)}{C}+\left(\frac{du}{dt}\right)_{t=0^+}\qquad(3')$$

La présence de la bobine assure la continuité du courant i_1, soit :

$$i_1\left(0^-\right)=i_1\left(0^+\right)=0$$

Comme :

$$i\left(0^+\right)=i_1\left(0^+\right)+i_2\left(0^+\right)=0+\frac{u\left(0^+\right)}{R}=\frac{E}{R}$$

$$i\left(0^+\right)=\frac{E}{R}\qquad(7)$$

L'équation (3') s'écrit alors :

$$0=\frac{E}{RC}+\left(\frac{du}{dt}\right)_{t=0^+}\Rightarrow\left(\frac{du}{dt}\right)_{t=0^+}=-\frac{E}{RC}=-\frac{E}{\tau}$$

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{t=0^+}=-\frac{E}{\tau}=-\frac{1}{2\tau}E+\Omega B$$

D'où :

$$B = \frac{1}{\Omega}\left(-\frac{2E}{2\tau} + \frac{E}{2\tau}\right)$$

$$B = -\frac{1}{\Omega}\frac{E}{2\tau}$$

Finalement on obtient comme expression pour u :

$$u = Ee^{-\frac{t}{2\tau}}\left(\cos\Omega t - \frac{1}{2\tau\Omega}\sin\Omega t\right)$$