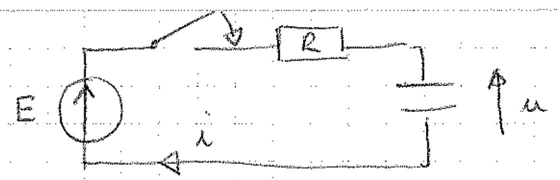
Constante de temps d'un circuit (R,C).



$$E = Ri + u \quad \text{or } i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du}{dt}$$

$$E = RC\frac{du}{dt} + u.$$

Solution de la forme :

$$u = A\,e^{-t/RC} + E.$$

or à $t=0$ $u(0) = u_0$. d'où :

$$u_0 = A + E \longrightarrow A = u_0 - E.$$

$$u = (u_0 - E)\,e^{-t/RC} + E$$

La donnée de u_1 permet de déterminer la valeur de la constante de temps $\tau = RC$. En effet :

$$\frac{u_1 - E}{u_0 - E} = e^{-t_1/RC} \Longrightarrow -\frac{t_1}{RC} = \ln\frac{u_1 - E}{u_0 - E}$$

$$\boxed{RC = \frac{t_1}{\ln\frac{u_0 - E}{u_1 - E}}} \qquad RC = 1{,}44.10^{-2}\,s$$

D'autre part :

$$i = \frac{E - u}{R} \Longrightarrow i_1 = \frac{E - u_0}{R}\,e^{-t_1/RC}$$

$$\Longrightarrow R = \frac{E - u_0}{i_1}\,e^{-t_1/RC}.$$

$$R = \frac{E - u_0}{i_1}\,e^{-\frac{t_1}{t_1}\ln\frac{u_0 - E}{u_1 - E}}.$$

$$R = \frac{E - u_0}{i_1}\left(\frac{E - u_1}{E - u_0}\right) = \frac{E - u_1}{i_1}$$

AN $R = \frac{(10 - 6)}{10^{-3}} = 4{,}0.10^{3}\,\Omega \Longrightarrow C = 3{,}6.10^{-6}\,F$

SP.E4.2. Réponse d'un circuit R, R'//C à un échelon de tension.

1. Expression de *u*(*t*).

Les lois de Kirchhoff permettent d'écrire :

$$i = i_1 + i_2 \qquad (1)$$

$$E = Ri + u \qquad (2)$$

Or :

$$i_1 = C\frac{du}{dt} \quad \text{et} \quad i_2 = \frac{u}{R'}$$

En injectant les expressions de (1) dans (2) on obtient :

$$E = R\left(C\frac{du}{dt} + \frac{u}{R'}\right) + u$$

$$E = RC\frac{du}{dt} + \left(1 + \frac{R}{R'}\right)u$$

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{RC}\left(1 + \frac{R}{R'}\right)u = \frac{E}{RC}$$

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{RC}\left(\frac{R+R'}{R'}\right)u = \frac{E}{RC}$$

Afin d'effectuer des comparaisons avec le circuit (R, C) on pose :

$$\tau = RC$$

$$\tau' = RC\frac{R'}{R+R'} = \tau\frac{R'}{R+R'}$$

On peut remarquer que :

$$\tau' < \tau$$

et que :

$\lim\limits_{R' \to \infty} \tau' = \tau$; $R' \to \infty$ correspondant à la situation où ce conducteur n'est pas présent.

La solution de l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ est de la forme :

$$u(t) = A\exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right) + \frac{R'}{R+R'}E$$

Comme à l'instant $t = 0^-$ le condensateur est déchargé et que de plus il y a continuité de la tension aux bornes d'un condensateur, on peut écrire :

$$u(0^+) = u(0^-)$$

$$A + \frac{R'}{R+R'}E = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{R'}{R+R'}E$$

On obtient ainsi l'expression de la tension $u(t)$:

$$u(t) = \frac{R'}{R+R'}E\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right)\right)$$

2. Comparaison du comportement de la charge du condensateur.

En l'absence de la résistance de fuite ($R' \to \infty$) on a :

$$\tau' \to \tau$$

$$u \to u = E\left(1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \quad \Rightarrow \quad q(t) = CE\left(1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

En présence de la résistance de fuite on a : $q'(t) = CE\dfrac{R'}{R+R'}\left(1-\exp\left(-\dfrac{t}{\tau'}\right)\right)$

Comme $\tau' < \tau$, la charge du condensateur s'effectue plus rapidement en présence de la résistance de fuite R'.

Le comportement à la date de fermeture de l'interrupteur s'apprécie en étudiant la pente de ces deux fonctions :

$$\frac{dq}{dt} = CE\frac{1}{\tau}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)_{t=0} = CE\frac{1}{\tau}$$

$$\frac{dq'}{dt} = CE\frac{R'}{R+R'}\frac{1}{\tau'}\exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right)$$

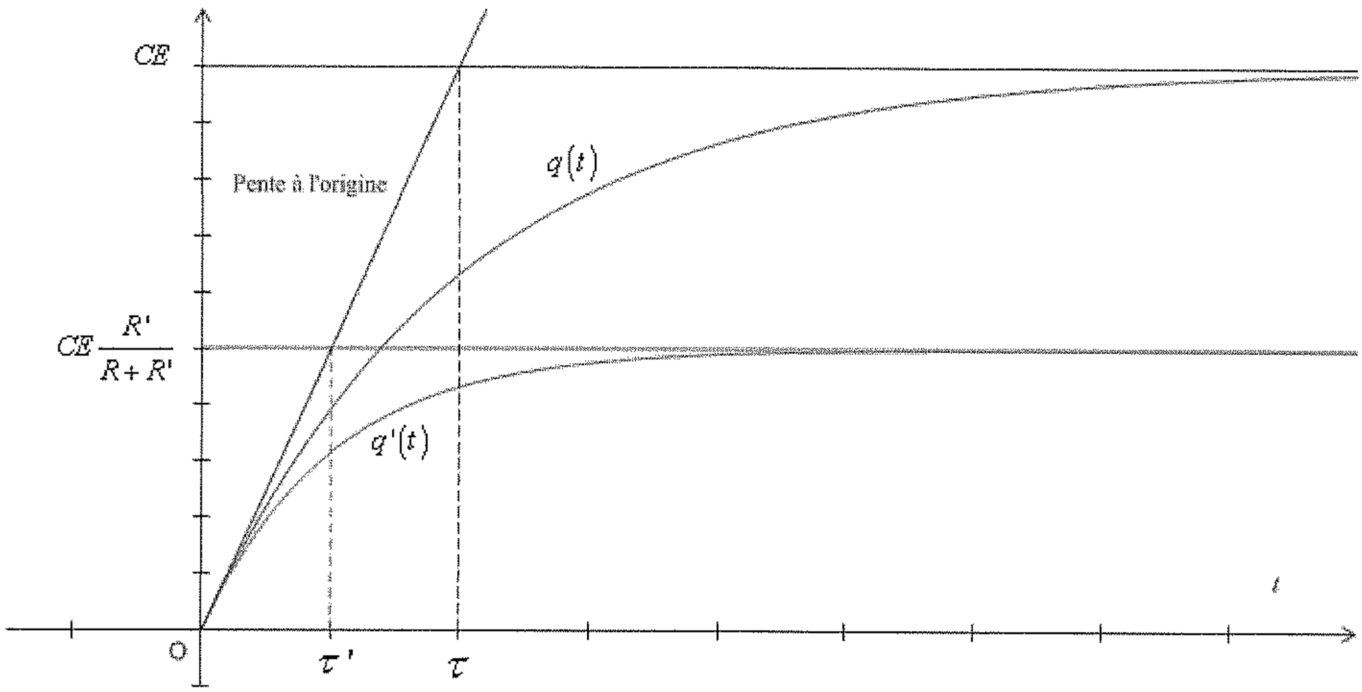
$$\left(\frac{dq'}{dt}\right)_{t=0} = CE\frac{R'}{R+R'}\frac{1}{\tau}\frac{R+R'}{R'} = CE\frac{1}{\tau} = \left(\frac{dq}{dt}\right)_{t=0}$$

La pente à l'origine est la même pour les deux cas.

Pour $t \to \infty$ on a :

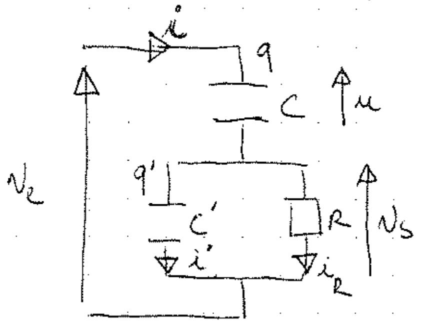
$$q(\infty) = CE$$

$$q'(\infty) = CE\frac{R'}{R+R'} < q(\infty)$$



Réponse à une tension en dent de scie. (I)

1. Equation différentielle.



On a : $v_e = \frac{q}{C} + v_s \qquad v_s = \frac{q'}{C'} = R i_R$

$i = i_r + i'$

Or

$i = \frac{dq}{dt} = C\frac{dv_e}{dt} - C\frac{dv_s}{dt}$

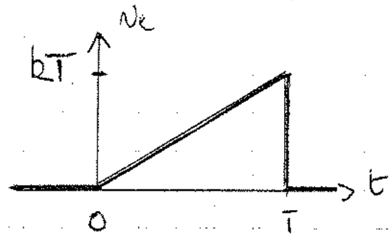
$i_R = \frac{v_s}{R}$ et $i' = \frac{dq'}{dt} = C'\frac{dv_s}{dt}$

La loi des noeuds s'exprime ici par :

$$C\frac{dv_e}{dt} - C\frac{dv_s}{dt} = \frac{v_s}{R} + C'\frac{dv_s}{dt}$$

$$\boxed{\frac{dv_s}{dt} + \frac{v_s}{R(C+C')} = \frac{C}{C+C'}\frac{dv_e}{dt}}$$

2. Expression de $v_s(t)$.



- Pour $0 < t \leq T$ $\quad v_e = kt \Rightarrow \frac{dv_e}{dt} = k$ d'où :

$\frac{dv_s}{dt} + \frac{v_s}{\tau} = \frac{kC}{C+C'}$ avec $\tau = R(C+C')$

$v_s = Ae^{-t/\tau} + \frac{kC\tau}{C+C'} = Ae^{-t/\tau} + kCR$.

Il y a continuité de la charge aux bornes de C', or v_s est la tension aux bornes de C'. Il y a donc continuité de la tension $v_s(t)$.

$$v_s(0^-) = v_s(0^+)$$

$$0 = A + kCR \Rightarrow A = -kCR$$

$$\boxed{v_s = kCR\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad \text{pour } 0 < t \leq T}$$

Si $T \gg \tau$ on $v_s(T) = kCR\left(1 - e^{-T/\tau}\right) \simeq kCR$

- Pour $t > T$ $\quad v_e = 0$ d'où :

$$\frac{dv_s}{dt} + \frac{v_s}{\tau} = 0 \Rightarrow v_s = A'e^{-t/\tau}$$

Réponse à une tension en dents de scie (II)

Il y a continuité de $v_s(t)$ du fait de la continuité de la charge q' portée par C'. D'où :

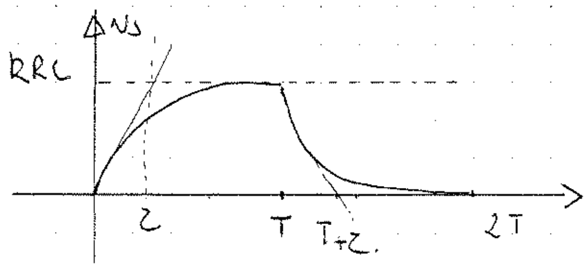
$$v_s(T^-) = v(T^+)$$

or $v_s(T^-) \simeq kCR$.

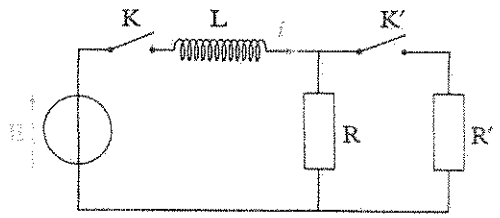
$$kCR = A' e^{-T/\tau} \Rightarrow A' = kCR e^{T/\tau}$$

$$\boxed{v_s = kCR\, e^{-\frac{(t-T)}{\tau}} \quad \text{pour } t > T.}$$

3. Courbe $v_s(t)$



SP.E3.4. Etablissement du courant dans un circuit inductif.



a) L'interrupteur K' étant ouvert, le circuit est un circuit RL alimenté par un générateur de fém E. La loi d'évolution de l'intensité i lors de l'établissement du courant dans la bobine est alors :

$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R}.$$

Lorsque le régime permanent est atteint, le courant dans la bobine est constant et la tension à ses bornes est nulle. On a donc :

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{R}}.$$

b) Quand l'interrupteur K' est fermé, la résistance équivalente branchée en série avec l'inductance L est :

$$R_{eq} = \frac{RR'}{R+R'}, \quad \text{d'où :} \quad \frac{L}{R_{eq}}\frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R_{eq}}.$$

La solution générale de cette équation différentielle s'écrit :

$$i(t) = \frac{E}{R_{eq}} + Ae^{-\frac{t}{\tau'}}, \quad \text{avec} \quad \tau' = \frac{L}{R_{eq}}.$$

Le courant dans la bobine est continu, donc à $t = 0$, on a :

$$i(0) = I = \frac{E}{R} = \frac{E}{R_{eq}} + A, \quad \text{d'où :} \quad A = \frac{E}{R} - \frac{E}{R_{eq}} = -\frac{E}{R'}.$$

La loi d'évolution de l'intensité i est alors :

$$i(t) = E\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) - \frac{E}{R'}e^{-\frac{t}{\tau'}} = \frac{\mathbf{E(R+R')}}{\mathbf{RR'}} - \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{R'}}e^{-\frac{t}{\tau'}}, \quad \text{avec} \quad \tau' = \frac{\mathbf{L(R+R')}}{\mathbf{RR'}}.$$

En régime permanent, l'intensité devient :

$$\mathbf{I'} = E\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = \frac{\mathbf{E(R+R')}}{\mathbf{RR'}}.$$