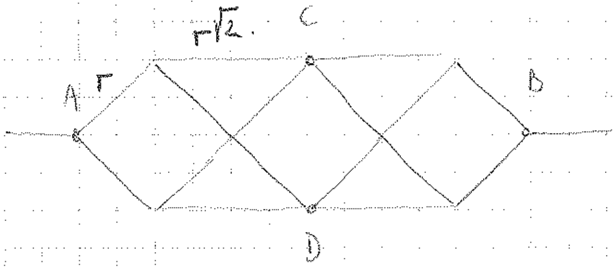
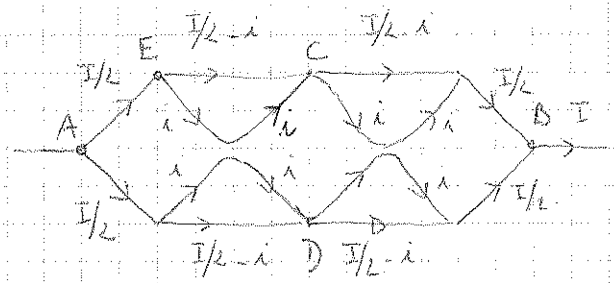
E2/1 Résistance équivalente de treillis métalliques.



AB : axe symétrie
CD : axe de symétrie.

De part et d'autre de ces axes, les branches symétriques sont parcourues par des courants de même intensité.



On ne dessoude pas en C car les deux points obtenus C' et C'' ne sont plus au même potentiel, ce qui n'est pas le cas pour les points situés sur l'axe AB.

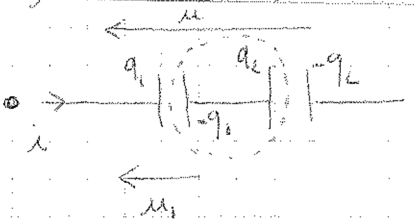
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_{ADB}} + \frac{1}{R_{ADB}} = \frac{2}{R_{ACB}}$$ or $R_{ACB} = 2R_{AC}$.

d'où $R_{eq} = R_{AC} = r + \underbrace{\frac{2r^2\sqrt{2}}{r\sqrt{2}+2r}}_{\text{résistance équivalente à la portion EC}}$

$$\boxed{R_{eq} = r + \frac{2r}{1+\sqrt{2}}}$$

E2.2 . Ponts diviseurs.

1) Relation entre u_1 et u.



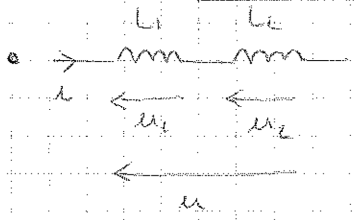
$u_1 = \frac{q_1}{C_1}$, $u_2 = \frac{q_2}{C_2}$ et $u = u_1 + u_2$.

$u = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2}$

La portion de circuit délimité en pointillés est électriquement neutre. Or comme un condensateur est aussi électriquement neutre on a :

$$q_1 = q_2 \Rightarrow u = q_1\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) = \underbrace{u_1 C_1}_{q_1}\left(\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}\right)$$

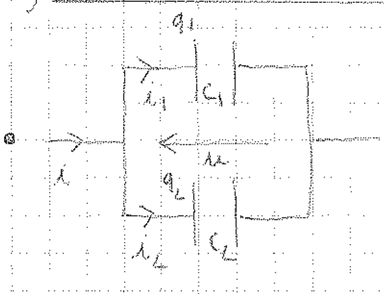
$$\boxed{u_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2}\, u}$$



$u_1 = L_1 \frac{di}{dt}$ et $u = (L_1 + L_2)\frac{di}{dt}$

d'où $\boxed{u_1 = \frac{L_1}{L_1 + L_2}\, u}$

2) Relation entre i_1 et i

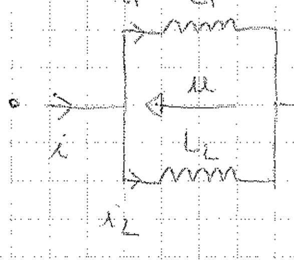


$u_1 = \frac{q_1}{C_1} \Rightarrow i_1 = C_1 \frac{du}{dt}$ et $u_2 = \frac{q_2}{C_2} \rightarrow i_2 = C_2 \frac{du}{dt}$.

$i = i_1 + i_2 = (C_1 + C_2)\frac{du}{dt}$

$i = (C_1 + C_2)\frac{i_1}{C_1}$

$$\boxed{i_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2}\, i}$$



$u = L_1 \frac{di_1}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt}$

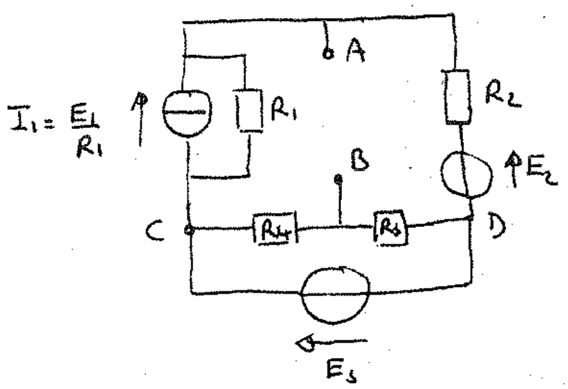
$i = i_1 + i_2 \Rightarrow \frac{di}{dt} = u\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)$

$$\frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} L_1 \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)$$

En intégrant $i = \frac{(L_1 + L_2)}{L_2} i_1 + i_0 \Rightarrow \boxed{i_1 = \frac{L_2}{L_1 + L_2}\, i}$ si $i_0 = 0$.

i_0 est une constante d'intégration.

E2-3 - Etude d'un circuit linéaire -



On utilise le théorème de Millman :

en A :

$$V_A\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)=\frac{V_C}{R_1}+\frac{V_D+E_2}{R_2}+I_1$$

(*) On pose $V_D = 0 \Rightarrow V_C = E_3$ d'où :

$$V_A\,\frac{R_1+R_2}{R_1 R_2}=\frac{E_3}{R_1}+\frac{E_2}{R_2}+\frac{E_1}{R_1}$$

$$\Rightarrow V_A=\frac{R_2}{R_1+R_2}E_1+\frac{R_1}{R_1+R_2}E_2+\frac{R_2}{R_1+R_2}E_3$$

en B avec $V_C = E_3$ et $V_D = 0$

$$V_B\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)=\frac{E_3}{R_4}$$

$$V_B=\frac{R_3}{R_3+R_4}E_3$$

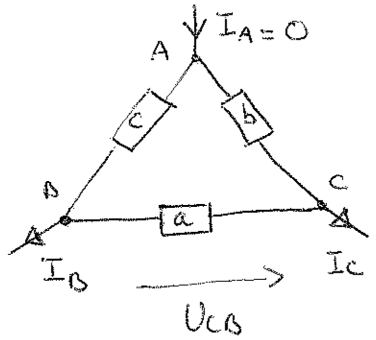
On obtient finalement

$$\boxed{V_A-V_B=\frac{R_2}{R_1+R_2}E_1+\frac{R_1}{R_1+R_2}E_2+\left(\frac{R_2}{R_1+R_2}-\frac{R_3}{R_3+R_4}\right)E_3}$$

El-4 transformation triangle-étoile.

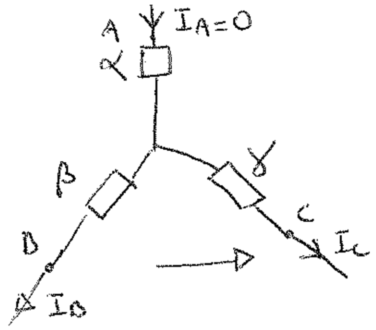
1. Théorème de Kennely.

L'équivalence doit être vérifiée quel que soit (I_A, I_B, I_C).
On prend le cas où $I_A = 0$. On a alors $I_C = -I_B$.



On a : $U_{CB} = R_{eq} I_B$ avec $R_{eq} = \dfrac{a(c+b)}{a+b+c}$

Pour l'étoile :



On a : $U_{CB} = R'_{eq} I_B$ avec $R'_{eq} = \beta + \gamma$.

Pour avoir l'équivalence il faut que $R'_{eq} = R_{eq}$ soit :

$$\beta + \gamma = \frac{a(b+c)}{a+b+c} \quad (1)$$

Par permutation circulaire $(I_B = 0, I_C = 0)$ on obtient.

$$\alpha + \gamma = \frac{b(a+c)}{a+b+c} \quad (2)$$

$$\alpha + \beta = \frac{c(a+b)}{a+b+c} \quad (3)$$

En faisant $(3)+(2)-(1)$ on obtient.

$$2\alpha = \frac{2bc}{a+b+c} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{bc}{a+b+c}}$$

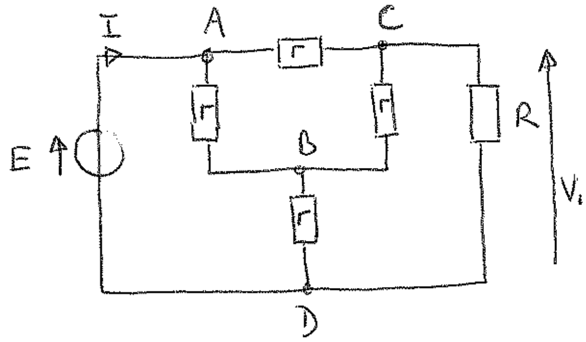
De même, par permutation circulaire :

$$\boxed{\beta = \frac{ac}{a+b+c} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{ab}{a+b+c}}$$

⇒ Au noeud i du triangle, la résistance en i de l'étoile est donnée par :

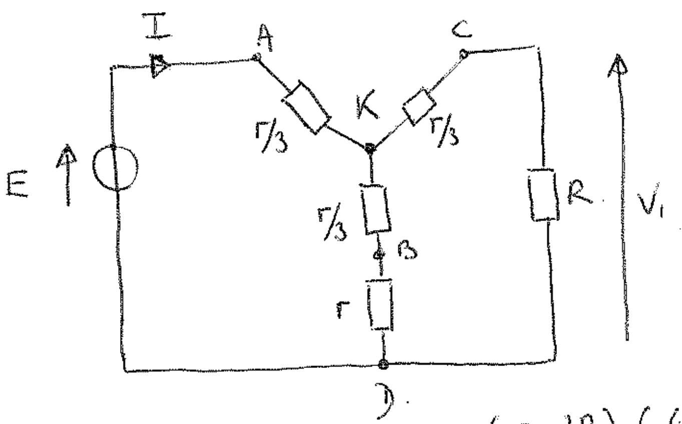
$$R_i(\text{étoile}) = \frac{\text{produit des 2 résistances branchées au noeud } i \text{ du triangle}}{\text{somme des résistances du triangle.}}$$

2. Détermination de la résistance R.



On transforme le "triangle" ABC en une "étoile"

$$\Rightarrow R_i = \frac{r \times r}{3r} = \frac{r}{3}.$$



On recherche la résistance équivalente à l'ensemble du montage :

on a : $\frac{r}{3} + \left(\left(\frac{r}{3}+R\right) // \left(\frac{r}{3}+r\right)\right)$

$\frac{r}{3} + \left(\left(\frac{r+3R}{3}\right) // \frac{4r}{3}\right)$

d'où : $$R_{eq} = \frac{r}{3} + \frac{\left(\frac{r+3R}{3}\right)\left(\frac{4r}{3}\right)}{\frac{5r+3R}{3}} = \frac{r}{3} + \frac{(r+3R)(4r)}{3(5r+3R)}$$

Pour avoir la même intensité il faut que $R = R_{eq}$.

$$R = \frac{r}{3} + \frac{(r+3R)(4r)}{5r+3R} \Rightarrow 3R(5r+3R) = r(5r+3R) + (r+3R)4r.$$

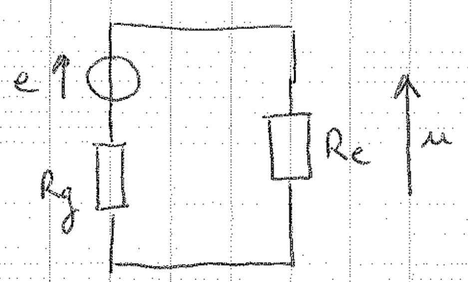
$$15Rr + 9R^2 = 5r^2 + 3Rr + 4r^2 + 12rR \Rightarrow \boxed{R = r.}$$

Les branches KBD et KCD sont identiques ⇒ en K le courant se divise en $\frac{I}{2}$ dans chaque branche. On a donc :

$$V_1 = \frac{RI}{2} \quad \text{or} \quad E = RI \quad \Rightarrow \boxed{V_1 = \frac{E}{2}}$$

SP2E2.7 Résistance d'entrée - Résistance de sortie

1. Erreur relative.



u tension mesurée par l'oscilloscope. Le montage réalise un pont diviseur de tension :

$$u = \frac{Re}{Re + Rg} e$$

L'erreur relative ε est définie par :

$$\varepsilon = \frac{e - u}{e} = 1 - \frac{u}{e} = 1 - \frac{Re}{Re + Rg} = \frac{Rg}{Re + Rg}$$

$$\varepsilon \simeq 5.10^{-5}$$

La mesure effectuée sur l'écran, ou à l'aide des utilitaires de mesure automatique présents dans un oscilloscope numérique engendre des erreurs bien supérieures à celle-ci. On peut donc alors confondre tension à vide e avec la tension mesurée.

2. Erreur relative.

$$\varepsilon' = \frac{Rg}{Re + Rg} \qquad \varepsilon' = 0,33$$

L'erreur relative est beaucoup plus importante dans ce cas. Il faut donc envisager un autre schéma de montage.

3. Suiveur de tension.

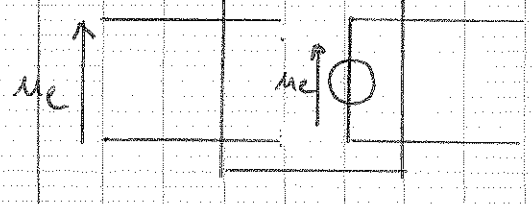
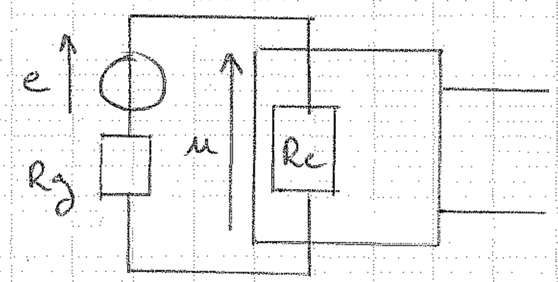


Schéma de principe d'un suiveur de tension.

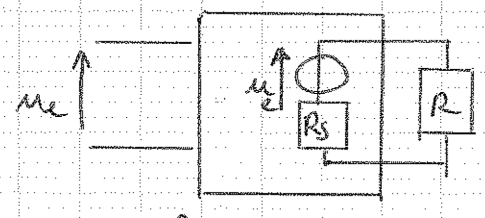
i) Facteur d'atténuation d'entrée



$u = \frac{Re}{Rg + Re} e$ si $Re \to \infty$ on a $u = e$

le facteur d'atténuation tend vers 1.

ii) Facteur d'atténuation de sortie



$u = \frac{R}{Rs + R} u_e$ si $Rs \to 0$ on a : $u = u_e$

le facteur d'atténuation tend vers 1.

iii) Avantage

le branchement direct du dipôle R sur le générateur fait apparaître le facteur d'atténuation $\frac{R}{Rg + R}$.

Quand on interpose entre le générateur et le dipôle un suiveur, le facteur d'atténuation devient égal à 1.

On dit que l'on a fait une adaptation d'"impédance"

La signification de ce nouveau terme sera vue un peu plus tard dans le cours d'électrocinétique