M7. Corrigés.
Force centrale conservative. Mouvement newtonien.

M7.1. Points de Lagrange.

1. Le satellite est soumis à deux forces gravitationnelles, l'une exercée par le Soleil, l'autre par la Terre. Toutes deux s'expriment à partir des distances entre ces astres et le satellite. Celle du Soleil s'écrit :

$$\vec{F}_{Soleil \to satellite} = -\left(\frac{\mathcal{G} M_S m}{r^2}\right)\vec{u}_r$$

La force exercée par la Terre est un peu plus délicate à écrire : elle est centrifuge si $r < d_{TS}$ (la Terre est à l'extérieur de l'orbite du satellite) et centripète si $r > d_{TS}$.

$$\vec{F}_{Terre \to satellite} = -\left(\frac{\mathcal{G} M_T m}{(D_{TS}-r)^2}\right)\vec{u}_r \quad \text{ssi} \quad r > d_{TS} \quad \text{ou} \quad \vec{F}_{Terre \to satellite} = +\left(\frac{\mathcal{G} M_T m}{(D_{TS}-r)^2}\right)\vec{u}_r \quad \text{ssi} \quad r < d_{TS}$$

En utilisant l'accélération en coordonnée polaires, pour une trajectoire cylindrique, la loi de la quantité de mouvement s'écrit :

$$m\begin{pmatrix} -r\dot{\theta}^2 \\ r\ddot{\theta} \end{pmatrix}\begin{matrix}\vec{u}_r \\ \vec{u}_\theta\end{matrix} = -\left(\frac{\mathcal{G} M_S m}{r^2}\right)\vec{u}_r \pm \left(\frac{\mathcal{G} M_T m}{(D_{TS}-r)^2}\right)\vec{u}_r \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} r\dot{\theta}^2 - \dfrac{\mathcal{G} M_S}{r^2} \pm \dfrac{\mathcal{G} M_T}{(D_{TS}-r)^2} = 0 \\ \ddot{\theta} = 0 \end{cases}}$$

2. La deuxième équation montre qu'en l'absence de composante de force orthoradiale, la vitesse angulaire reste constante. La troisième loi de Kepler appliquée au système Soleil/Terre en donne l'expression :

$$\frac{T^2}{d_{TS}^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G} M_S} \quad \Rightarrow \quad \frac{4\pi^2}{\Omega^2 d_{TS}^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G} M_S} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Omega^2 = \frac{\mathcal{G} M_S}{d_{TS}^3}}$$

3. L'équation obtenue par projection sur la direction radiale se décline en deux versions, selon si r est inférieur ou supérieur à d_{TS}. Conservons celle valable au-delà de la Terre et substituons Ω^2 par son expression :

$$r\Omega^2 - \frac{\mathcal{G} M_S}{r^2} - \frac{\mathcal{G} M_T}{(r-d_{TS})^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathcal{G} M_S r}{d_{TS}^3} - \frac{\mathcal{G} M_S}{r^2} - \frac{\mathcal{G} M_T}{(r-d_{TS})^2} = 0$$

Nous aboutissons à un polynôme d'ordre 5 dont la résolution analytique n'est pas connue (vous pouvez la développer pour le vérifier). Pour la résoudre de façon approchée, multiplions la par d_{TS}^2 puis identifions ε :

$$M_S\left(\frac{r_{éq}}{d_{TS}}\right) - \frac{M_S}{\left(\frac{r_{éq}}{d_{TS}}\right)^2} - \frac{M_T}{\left(\frac{r_{éq}}{d_{TS}} - 1\right)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_S(1+\varepsilon) - \frac{M_S}{(1+\varepsilon)^2} - \frac{M_T}{\varepsilon^2} = 0$$

Effectuons un développement limité de l'expression pour isoler ε :

$$M_S(1+\varepsilon) - M_S(1-2\varepsilon) - \frac{M_T}{\varepsilon^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3M_S\varepsilon - \frac{M_T}{\varepsilon^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon = \left(\frac{M_T}{3M_S}\right)^{1/3}}$$

Numériquement, nous calculons $\varepsilon = 1{,}00 \cdot 10^{-2}$, ce qui légitime l'approximation, puis une distance de la Terre au satellite de 1,5 millions de kilomètres (soit un centième de la distance Terre Soleil.

1. Mouvement uniforme.

On étudie le mouvement du satellite dans le référentiel géocentrique R_g.
Ce système est soumis à la force de gravitation :

$$\vec{F} = -G\frac{M_T m}{r^2}\vec{u}_{OM}$$

Comme la trajectoire est circulaire $\vec{u}_{OM} = -\vec{u}_N$ avec $\vec{u}_N$ vecteur normal de la base de Frenet : dans ce cas la force est radiale et normale au déplacement.
D'après le principe de la dynamique :

$$+G\frac{M_T m}{r^2}\vec{u}_N = m\frac{v^2}{r}\vec{u}_N + m\frac{dv}{dt}\vec{u}_t$$

Cette dernière égalité implique que $\frac{dv}{dt}=0$, la valeur de la vitesse est constante.

2. Période de révolution

L'équation précédente permet d'écrire que : $v = \left(G\frac{M_T}{r}\right)^{1/2}$

Le mouvement étant uniforme, la durée T pour décrire une révolution peut s'écrire :

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi r\left(\frac{r}{GM_T}\right)^{1/2}$$

$$\boxed{T = 2\pi\left(\frac{r^3}{GM_T}\right)^{1/2}}$$

3. Energie mécanique

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{mM_T}{r}G$$

Le travail élémentaire de la force de gravitation s'écrit :

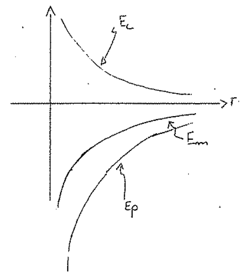
$$\delta W = \vec{F}\cdot\vec{\delta l} = -G\frac{M_T m}{r^2}dr = d\left(G\frac{M_T m}{r}\right) = -dE_p$$

$$E_p = -G\frac{M_T m}{r} + cte$$

Pour $r \to \infty$, on pose $E_p(\infty) = 0 \Rightarrow cte = 0$.

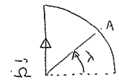
On obtient :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}G\frac{mM_T}{r} - G\frac{M_T m}{r} = -\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r} = -E_c$$



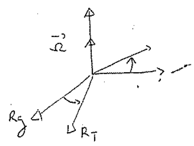
4. Energies au sol.

$$E_{c_{sol}} = \frac{1}{2}m\Omega^2R^2\cos^2\lambda \qquad E_{p_{sol}} = -\frac{GM_T m}{R}$$



5. Satellite géostationnaire

- Le satellite doit être fixe par rapport au référentiel terrestre R_T.



$\vec{\Omega}$: vecteur rotation du référentiel R_T par rapport à R_g.

$$\vec{v}_{S/R_g} = \vec{v}_{S/R_T} + \vec{\Omega}\wedge\vec{OS} \quad \text{or } \vec{v}_{S/R_T} = \vec{0}$$

$$\vec{v}_{S/R_g} = \vec{\Omega}\wedge\vec{OS}$$

Cette équation montre que $\vec{v}_{S/R_g}$ doit être orthogonale à $\vec{\Omega}$ qui est porté par Oz $\Rightarrow$ la trajectoire est contenue dans un plan // au plan équatorial.
D'autre part le plan de la trajectoire doit contenir le centre de force.
En conclusion le seul plan possible est le plan équatorial.

- D'après la question 2

$$v_s = \frac{2\pi r_s}{T} \text{ or } v_s = \left(G\frac{M_T}{r_s}\right) \text{ d'où}$$

$$\Omega r_s = \left(G\frac{M_T}{r_s}\right)^{1/2} \longrightarrow r_s = \left(G\frac{M_T}{\Omega^2}\right)^{1/3} \qquad r_s = 42{,}2.10^3 km.$$

$$\longrightarrow v_s = \frac{2\pi}{T}\left(G\frac{M_T}{\Omega^2}\right)^{1/3} \qquad v_s = 3{,}1.\ km s^{-1}.$$

6. Energie nécessaire.

Lorsque le satellite est au sol :

$$E_{ms} = \frac{1}{2}m\Omega^2R^2\cos^2\lambda - G\frac{M_T m}{R}$$

Lorsque le satellite est sur une orbite géostationnaire :

$$E_m = \frac{1}{2}mv_s^2 - G\frac{M_T m}{r_s} = -E_c$$

$$E_m = -\frac{1}{2}\frac{mM_T G}{r_s}$$

D'où :

$$\Delta E_m = E_m - E_{msol} = m\left(GM_T\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2r_s}\right) - \frac{1}{2}\Omega^2R^2\cos^2\lambda\right)$$

$$\Delta E_m = m\left(G\frac{M_T}{R}\left(1 - \frac{R}{2r_s}\right) - \frac{1}{2}\Omega^2R^2\cos^2\lambda\right)$$

$$>0$$

ΔE_m qui représente l'énergie nécessaire pour placer le satellite sur l'orbite géostationnaire est d'autant plus faible que la base de lancement se trouve proche de l'équateur.

Position d'une base de lancement.

Cet exercice reprend en partie l'exercice MII 2, c'est pour cela que les résultats sont donnés sans démonstration.

1. Energie totale

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{avec } v = \left(G\frac{M_T}{a}\right)^{1/2} \longrightarrow E_c = \frac{1}{2}G\frac{M_T m}{a}$$

$$E_p = -G\frac{M_T m}{a}$$

$$E_t = -G\frac{M_T m}{2a}$$

2. Vitesse d'entraînement.

$$V_e = R\omega_T\cos\lambda$$

$$E_c' = \frac{1}{2}mR^2\omega_T^2\cos^2\lambda \qquad E_p' = -\frac{GM_T m}{R}$$

$$E_t' = -\frac{GM_T m}{R} + \frac{1}{2}mR^2\omega_T^2\cos^2\lambda$$

3. Position de la base de lancement.

- Cas où le satellite tourne dans le même sens que la Terre.

$$\Delta E_+ = GM_T m\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2a}\right) - \frac{1}{2}m\omega_T^2R^2\cos^2\lambda$$

- Dans le cas où le satellite tourne en sens inverse, il a fallu d'abord l'arrêter par rapport à des axes fixes, puis le relancer avec une vitesse V_e opposée avant d'être ramené au problème précédent

$$\Delta E_- = \Delta E_+ + mV_e^2 = GM_T m\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2a}\right) + \frac{1}{2}m\omega_T^2R^2\cos^2\lambda$$

Le cas le plus favorable correspond à ΔE_+.
Pour rendre cette énergie minimale on prend $\lambda = 0 \Rightarrow$ choix de Kourou

Chute d'un météorite

1. Force et énergie potentielle

- $$\boxed{\vec{F} = -\frac{GMm}{OM^2}\,\vec{u}_{OM} = -\frac{GMm}{r^2}\,\vec{u}_r}$$
- $\delta W = \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\frac{GMm}{r^2}\,\vec{u}_r\cdot\left(dr\,\vec{u}_r + \quad\right)$

$$\delta W = +\,GMm\,d\left(\frac{1}{r}\right) = -dE_p \quad \text{d'où}$$

$$\boxed{E_p = -\frac{GMm}{r} \quad \text{avec } E_p(\infty) = 0}$$

2. Grandeurs conservées

- Le météorite n'étant soumis qu'à la force gravitationnelle conservative au cours de son mouvement, son énergie mécanique est une constante

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \text{cte}$$

- Le champ de forces étant central, le moment cinétique se conserve au cours du mouvement, en effet.

$$\vec{L}_O = \vec{OM}\wedge m\vec{v}\ , \quad \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \underbrace{\vec{v}\wedge m\vec{v}}_{=\vec{0}} + \vec{OM}\wedge m\vec{a}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{OM}\wedge\vec{F} \quad \text{car } m\vec{a} = \vec{F}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = (r\,\vec{u}_r)\wedge\left(-\frac{GMm}{r^2}\,\vec{u}_r\right) = \vec{0} \quad \text{d'où}$$

$$\vec{L}_O = \vec{OM}\wedge m\vec{v} = \vec{Cte}$$

Le vecteur $\vec{L}_O$ garde une direction fixe au cours du temps, or $\vec{OM}$ est orthogonal à $\vec{L}_O$, il s'ensuit que $\vec{OM}$ est donc toujours contenu dans un plan orthogonal à $\vec{L}_O$: le mouvement du météorite est donc plan (défini par O et $\vec{v}_0$).

3. Orthogonalité

En coordonnées polaires $\vec{OM} = r\,\vec{u}_r$, $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$.

En A, r est minimum, donc $\dot{r} = 0$, d'où :

$$\vec{v}(A) = \vec{v}_1 = OA\,\dot{\theta}\,\vec{u}_{\theta_1} = d\,\dot{\theta}\,\vec{u}_{\theta_1}$$

$\vec{v}_1$ est colinéaire à $\vec{u}_{\theta_1}$ et donc orthogonale à $\vec{OA} = d\,\vec{u}_{r_1}$

4. Relations

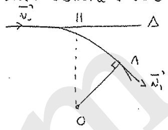
- Conservation de l'énergie mécanique :

$$E_m(\infty) = E_m(A)$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{d}\ , \quad \boxed{v_0^2 = v_1^2 - \frac{2GM}{d}} \quad (1)$$

- Conservation du moment cinétique

$$\vec{L}_O(M_0) = \vec{L}_O(A) \qquad M_0 \text{ position du météorite à } t = 0.$$



$$\vec{OM}_0\wedge m\vec{v}_0 = \vec{OA}\wedge m\vec{v}_1$$

Soit H le projeté orthogonal de O sur Δ.

$$\vec{OM}_0\wedge m\vec{v}_0 = (\vec{OH} + \vec{HM}_0)\wedge m\vec{v}_0$$

$$= \vec{OH}\wedge m\vec{v}_0 \quad \text{car } \vec{HM}_0 \,/\!/\, \vec{v}_0$$

Comme $\vec{OH}\perp\vec{v}_0$ et $\vec{OA}\perp\vec{v}_1$ on obtient alors :

$$\boxed{b\,v_0 = d\,v_1} \quad (2)$$

5. Expression de D.

$(2) \Rightarrow v_1 = \frac{b}{d}v_0$ en remplaçant dans (1).

$$v_0^2 = v_0^2\frac{b^2}{d^2} - \frac{2GM}{d} \quad (3)$$

$$d^2 + \frac{2GM}{v_0^2}\,d - b^2 = 0 \qquad \text{En ne conservant que la racine posit}$$

$$\boxed{d = -\frac{GM}{v_0^2} + \left(\left(\frac{GM}{v_0^2}\right)^2 + b^2\right)^{1/2}} \qquad d = \frac{GM}{v_0^2}\left(\left(1 + \left(\frac{b\,v_0^2}{GM}\right)^2\right)^{1/2} - 1\right)$$

6. Condition sur b

Le météorite rencontre la Terre lorsque $r \leq R$ or $r_{min} = d$
Il y a donc rencontre si

$$\boxed{R \geq d = \frac{GM}{v_0^2}\left(\left(1 + \left(\frac{b\,v_0^2}{GM}\right)^2\right)^{1/2} - 1\right)}$$

7. Application numérique.

Rencontre si $d = R$ d'où, en utilisant l'équation du second degré vérifiée par d (eq (3), Q.5)

$$R^2 + \frac{2GM}{v_0^2}R - b^2 = 0$$

$$b = R\left(1 + \frac{2GM}{v_0^2 R}\right)^{1/2}$$

Or $M = \rho V = \rho\,\frac{4}{3}\pi R^3 \longrightarrow R = \left(\frac{3M}{4\pi\rho}\right)^{1/3}$

$$\boxed{b = \left(\frac{3M}{4\pi\rho}\right)^{1/3}\left(1 + \frac{2GM}{v_0^2}\left(\frac{4\pi\rho}{3M}\right)^{1/3}\right)^{1/2}}$$

$$b = \left(\frac{3\times 5{,}98\,10^{24}}{4\times 3{,}14\times 5{,}52.10^3}\right)\left(1 + \frac{2\times 6{,}67.10^{-11}\times 5{,}98\,10^{24}}{(11\,10^3)^2}\left(\frac{4\times 3{,}14\times 5{,}52.10^3}{3\times 5{,}98\,10^{24}}\right)^{1/3}\right)^{1/2}$$

$$b = 9{,}09\ 10^6\,\text{m} \qquad \text{soit } b = 1{,}43R$$