

M4. Exercices. Corrigé.

Mouvement de particules chargées dans des champs électrique et magnétique, uniformes et stationnaires.

M4.1. Accélérateur cyclotron.

1. Pour que le proton, de charge positive, soit accéléré dans le sens de l'axe Ox croissant, le champ doit être dirigé selon \vec{u}_x . Sa vitesse à la sortie des plaques s'obtient soit par application de la loi de la quantité de mouvement, soit par un bilan énergétique. La détermination de la durée de ce tronçon nécessite la première méthode, mais nous allons développer les deux.

MISE EN ÉQUATION PAR LA LOI DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT PROJETÉE SELON OX

En l'absence de frottement, seule la force électrostatique a un effet notable sur le proton : son poids est négligeable devant cette dernière.

$$\begin{cases} \vec{F}_{\text{Lorentz}}^{\text{électrique}} = e\vec{E} \\ \vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x \end{cases} \Rightarrow m\ddot{x} = eE$$

La résolution de cette équation conduit à :

$$\ddot{x} = \frac{eE}{m} \Rightarrow \dot{x} = \frac{eEt}{m} + 0 \Rightarrow x = \frac{eEt^2}{2m} - \frac{d}{2}$$

Dans l'expression de la vitesse, la constante d'intégration est choisie nulle car le proton est immobile à l'instant initial. Dans l'expression de la position, elle vaut $-d/2$ car le proton part de O_1 . Le proton sort des plaques en $x = d/2$ à l'instant t_1 :

$$x(t_1) = \frac{d}{2} \Rightarrow \frac{eEt_1^2}{2m} - \frac{d}{2} = \frac{d}{2} \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2md}{eE}} \text{ ou } t_1 = \sqrt{\frac{2md^2}{eU}}$$

Le champ électrique uniforme est lié à la tension entre les plaques du condensateur par la relation $U = Ed$. En remplaçant cet instant dans l'expression de la vitesse, nous trouvons :

$$v_1 = \dot{x}(t_1) \Rightarrow v_1 = \frac{eE}{m} \sqrt{\frac{2md}{eE}} \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2deE}{m}} \text{ ou } v_1 = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

MISE EN ÉQUATION PAR LE THÉORÈME DE L'ÉNERGIE MÉCANIQUE

Choisissons l'origine des potentiels sur la plaque chargée négativement, en O_2 . Le potentiel sur l'autre plaque, en O_1 , vaut ainsi U . L'énergie potentielle du proton de charge e soumis au potentiel V est $E_p = eV$, de sorte que sa variation entre l'entrée et la sortie des plaques s'écrit :

$$\Delta E_p = E_p(O_2) - E_p(O_1) = 0 - eU$$

Dans le même temps, la vitesse de la particule passe de zéro à v_1 et la variation d'énergie cinétique s'écrit :

$$\Delta E_c = E_c(O_2) - E_c(O_1) = \frac{1}{2}mv_1^2 - 0$$

En l'absence de forces dissipatives, la conservation de l'énergie mécanique conduit à :

$$\Delta E_p + \Delta E_c = 0 \Rightarrow -eU + \frac{1}{2}mv_1^2 = 0 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

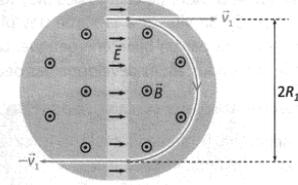
Le résultat est fort opportunément identique à celui obtenu par la loi de la quantité de mouvement, mais nous ne disposons pas de la durée t_1 . Numériquement, nous calculons :

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \times 1,60 \cdot 10^{-19} \times 5000}{1,66 \cdot 10^{-27}}} = 9,82 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ et } t_1 = \sqrt{\frac{2 \times 1,66 \cdot 10^{-27} \times 0,01^2}{1,60 \cdot 10^{-19} \times 5000}} = 2,04 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

L'approche énergétique permet de gagner du temps dans l'étude du mouvement en masquant la dépendance temporelle. Elle n'est pas adaptée si l'on recherche précisément une durée.

2. Dans un champ magnétostatique uniforme, la trajectoire d'une particule entrant perpendiculairement au champ est un cercle de rayon R_1 parcouru avec une pulsation ω (revoir cours, §4.3).

$$R_1 = \frac{mv_1}{eB} \text{ et } \omega = \frac{eB}{m}$$



Ce rayon est proportionnel à la vitesse de la particule : si celle-ci augmente au fur et à mesure des traversées du condensateur, le rayon aussi.

La pulsation, en revanche, ne dépend que de paramètres constants et sera la même à chaque traversée de la boîte. La norme de la vitesse du proton est constante le long de cette trajectoire, de sorte qu'il revient sur la plaque 2 avec une vitesse $-\vec{v}_1$, opposée à celle qu'il avait en entrant dans la boîte. La durée du parcours se déduit de la pulsation : elle correspond à une demi-période car le proton effectue un demi-tour :

$$t_2 = \frac{T}{2} \text{ et } T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow t_2 = \frac{\pi m}{eB} = \frac{\pi \times 1,66 \cdot 10^{-27}}{1,60 \cdot 10^{-19} \times 1} = 3,26 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

3. Le proton n'acquiert de la vitesse que dans la zone où il est soumis au champ électrostatique. Chaque traversée lui permet d'augmenter son énergie cinétique de $-\Delta E_p = eU$, soit, en notant n le nombre de traversée du condensateur ($n - 1$ correspond au nombre de demi-tour effectués dans le champ magnétique).

$$E_{c_{n+1}} - E_{c_n} = eU \Rightarrow E_{c_n} = neU \Rightarrow v_n = \sqrt{\frac{2neU}{m}}$$

4. Le rayon de la trajectoire circulaire effectuée dans une boîte est proportionnel à la vitesse du proton :

$$R_n = \frac{mv_n}{eB} \Rightarrow R_n = \frac{m}{eB} \sqrt{\frac{2neU}{m}} \Rightarrow R_n = \sqrt{\frac{2mUn}{eB^2}}$$

La taille du cyclotron limite ainsi le nombre de tour et la vitesse de sortie du proton :

$$n = \frac{eB^2 R_1^2}{2mU} \Rightarrow n_{\text{max}} = \frac{eB^2 R^2}{2mU} = \frac{1,60 \cdot 10^{-19} \times 1^2 \times 1}{2 \times 1,66 \cdot 10^{-27} \times 5000} = 9639$$

5. L'énergie cinétique acquise par le proton vaut :

$$E_{c_n} = neU = 9639 \times 1,60 \cdot 10^{-19} \times 5000 = 7,71 \cdot 10^{-12} \text{ J} = 4,82 \text{ MeV}$$

Avec une formule classique, la vitesse atteinte du proton à la sortie de l'accélérateur serait :

$$v_n = \sqrt{\frac{2neU}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 9639 \times 1,60 \cdot 10^{-19} \times 5000}{1,66 \cdot 10^{-27}}} = 9,64 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Cette vitesse représente 32% de celle de la lumière, de sorte qu'un traitement relativiste s'impose. En conservant la valeur de l'énergie cinétique acquise par la particule, le facteur relativiste γ vaut :

$$E_c = (\gamma - 1)mc^2 \Rightarrow \gamma = 1 + \frac{E_c}{m_0 c^2} = 1 + \frac{7,71 \cdot 10^{-12}}{1,66 \cdot 10^{-27} \times (3,00 \cdot 10^8)^2} = 1,0516$$

Il diffère de l'unité de 5%, de sorte que la vitesse réelle est sensiblement inférieure à celle obtenue en mécanique classique :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow v = c \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 3,00 \cdot 10^8 \sqrt{1 - \frac{1}{1,0516^2}} = 9,28 \cdot 10^7 \text{ m}$$

6. La durée totale passée dans les boîtes de déflexion magnétique correspond au produit du nombre de demi-tour par la demi-période :

$$\Delta t_{mag} = nt_2 = 9639 \times 3,26 \cdot 10^{-8} = 3,14 \cdot 10^{-4} \text{ s}$$

La durée totale passée entre les plaques du condensateur se déduit de l'expression donnant la vitesse entre les plaques. Nous supposons pour cela que les traversées successives du condensateur sont mises bout à bout :

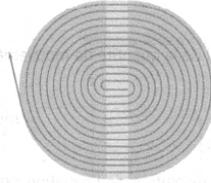
$$v_n = \frac{eU}{md} \Delta t_{elec} \Rightarrow \Delta t_{elec} = \frac{mdv_n}{eU} = \frac{1,66 \cdot 10^{-27} \times 10^{-2} \times 9,28 \cdot 10^7}{1,60 \cdot 10^{-19} \times 5000} = 1,92 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

La durée totale du trajet dans le cyclotron est la somme de ces contributions : $\Delta t = \Delta t_{mag} + \Delta t_{elec} = 3,16 \cdot 10^{-4} \text{ s}$. Au cours du premier demi-tour, les durées passées dans le condensateur et dans les boîtes de déflexion sont du même ordre de grandeur. Le temps passé entre les plaques diminue rapidement quand le proton prend de la vitesse, tandis que le temps passé dans les boîtes de déflexion reste constant : au final, l'essentiel de la durée du parcours est liée à la déflexion magnétique. La tension appliquée aux plaques peut être pratiquement périodique : la synchronisation du champ électrique avec les passages successifs du proton n'est nécessaire que pour les premiers tours.

7. Pour accélérer le proton à cette même vitesse avec un unique condensateur, il faudrait charger ce dernier sous une tension U' :

$$E_{c_n} = eU' \Rightarrow U' = nU = 9639 \times 5000 = 4,82 \cdot 10^7 \text{ V}$$

8. Le cyclotron est un accélérateur de particule enroulé sur lui-même : le champ électrique permet d'accélérer les particules tandis que le champ magnétique les confine dans une zone de taille limitée.



Les accélérateurs de particules (canons à électrons, cyclotrons, synchrotrons) constituent une application importante des mouvements en champ électromagnétique. L'absence de frottement à l'échelle microscopique permet d'utiliser facilement le traitement énergétique.

M4.2. E et B orthogonaux. Cycloïde.

1. Equations différentielles.

On étudie le mouvement de la particule dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Ce système est soumis à l'action de son poids et à la force de Lorentz. On néglige cependant l'effet du poids devant celui de la force électromagnétique. La seconde loi de Newton permet d'écrire que :

$$\vec{F} = m\vec{a} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

L'accélération s'écrit alors :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \frac{q}{m} \begin{pmatrix} 0 \\ E + v \dot{z} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}$$

On obtient le système d'équations différentielles couplées suivant :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \omega \dot{y} & (1) \\ \ddot{y} = \frac{q}{m} E - \omega \dot{x} & (2) \\ \ddot{z} = 0 & (3) \end{cases} \text{ avec } \omega = \frac{qB}{m}$$

2. Equations paramétriques de la trajectoire

L'équation (3), compte tenu des conditions initiales, donne $z = 0$. Le mouvement s'effectue dans le plan xOy .

L'intégration de (1) fournit :

$$\dot{x} = \omega y + \dot{x}(0)$$

Comme la composante initiale de la vitesse suivant Ox est nulle on obtient :

$$\dot{x} = \omega y$$

On reporte ce dernier résultat dans l'équation (2) et on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \frac{q}{m} E$$

La solution de cette équation est :

$$y = \frac{q}{m\omega^2} E + C \cos \omega t + D \sin \omega t = R + C \cos \omega t + D \sin \omega t$$

C et D sont des constantes d'intégration que l'on détermine à partir des conditions initiales. En effet :

$$y(0) = R + C = 0 \rightarrow C = -R$$

$$\dot{y}(0) = D\omega = 0 \rightarrow D = 0$$

On obtient finalement :

$$y = R(1 - \cos \omega t)$$

Comme $\dot{x} = \omega y$ on a $\dot{x} = R\omega(1 - \cos \omega t)$

L'intégration de cette dernière équation fournit, en tenant compte des conditions initiales :

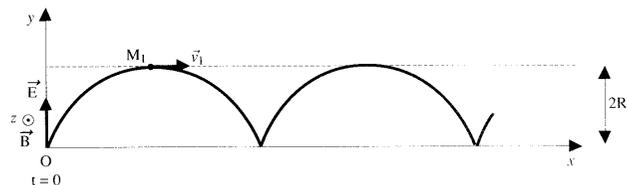
$$x = R(\omega t - \sin \omega t)$$

3. Allure de la trajectoire.

Pour déterminer l'allure de la courbe, on dresse un tableau de valeurs :

ωt	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	0	$\frac{R}{2}(\pi - 2)$	πR	$\frac{R}{2}(3\pi + 2)$	$2\pi R$
y	0	R	2R	R	0

On limite l'étude à l'intervalle utilisé compte de la périodicité des fonctions utilisées.



4. Valeur de la vitesse.

La norme du vecteur vitesse a pour expression :

$$v = R\omega \left(2(1 - \cos \omega t) \right)^{1/2} = 2R\omega \sin \frac{\omega t}{2}$$

A la date $t = \frac{\pi}{\omega}$ la vitesse est égale à :

$$v = 2R\omega = 2 \frac{E}{B}$$

5. Utilisation du théorème de l'énergie cinétique.

On applique le théorème de l'énergie cinétique entre les dates 0 et $t = \frac{\pi}{\omega}$:

$$\frac{1}{2} m v^2 = \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} q \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} q E dy$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = q E 2R$$

Or :

$$R = \frac{E}{B\omega} \quad \omega = \frac{qB}{m} \rightarrow v^2 = 4 \left(\frac{q}{m} \right) E \left(\frac{Em}{BqE} \right) = 4 \frac{E^2}{B^2} R = \frac{E^2}{B\omega}$$

Finalement :

$$v = 2 \frac{E}{B}$$

M4.3. Particule chargée dans une chambre à bulle.

1. En coordonnées cartésiennes, les vecteurs cinématiques valent :

$$\vec{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \vec{u}_x \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \vec{u}_x \Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} \vec{u}_x$$

Il n'y a pas de support pour limiter le mouvement, de sorte qu'aucune simplification n'apparaît lors de l'étude cinématique.

Les forces qui s'exercent sur la particule se calculent à partir du vecteur vitesse instantanée (et non de la vitesse initiale, qui sert à déterminer les constantes d'intégration une fois les équations du mouvement résolues).

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}}^{\text{magnétique}} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \Rightarrow \vec{F}_{\text{Lorentz}}^{\text{magnétique}} = q \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \vec{u}_x \Rightarrow \vec{F}_{\text{Lorentz}}^{\text{magnétique}} = qB \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{pmatrix} \vec{u}_x$$

$$\vec{F}_{\text{frottement}}^{\text{fluide}} = -\alpha_f \vec{v} \Rightarrow \vec{F}_{\text{frottement}}^{\text{fluide}} = -\alpha_f \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \vec{u}_x$$

La loi de la quantité de mouvement conduit à un système d'équations différentielles linéaires couplées :

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{Lorentz}}^{\text{magnétique}} + \vec{F}_{\text{frottement}}^{\text{fluide}} \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = -\alpha_f \dot{x} + qBy \\ m\ddot{y} = -\alpha_f \dot{y} - qB\dot{x} \\ m\ddot{z} = -\alpha_f \dot{z} \end{cases}$$

2. La résolution de l'équation portant sur la coordonnée z est directement possible et conduit, en utilisant la notation proposée par l'énoncé, à :

$$\tau \ddot{z} + \dot{z} = 0 \Rightarrow \dot{z} = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \text{ avec } \dot{z}(0) = A = v_{0z} \Rightarrow \dot{z} = v_{0z} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

La constante d'intégration A est ajustée pour que la vitesse initiale soit correcte. Une seconde intégration fait apparaître une autre constante d'intégration C que nous déterminons de la même manière.

$$z = -\tau v_{0z} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + C \text{ avec } z(0) = -\tau v_{0z} + C = 0 \Rightarrow C = \tau v_{0z} \Rightarrow z = \tau v_{0z} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]$$

Le mouvement dans le plan Oxy est décrit par deux équations couplées qui se réécrivent en utilisant les notations réduites :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{\dot{x}}{\tau} - \omega \dot{y} = 0 & (1) \\ \ddot{y} + \frac{\dot{y}}{\tau} + \omega \dot{x} = 0 & (2) \end{cases} \text{ se résout en utilisant : } \underline{u} = x + jy \Rightarrow \underline{\dot{u}} = \dot{x} + j\dot{y} \Rightarrow \underline{\ddot{u}} = \ddot{x} + j\ddot{y}$$

La notation complexe proposée permet d'associer les deux équations en effectuant une combinaison linéaire :

$$(1) + j(2) \Rightarrow \underline{\ddot{u}} + \frac{\underline{\dot{u}}}{\tau} + \omega \underline{j\dot{x} - \dot{y}} = 0 \Rightarrow \underline{\ddot{u}} + \frac{\underline{\dot{u}}}{\tau} + j\omega \underline{\dot{u}} = 0$$

Cette équation admet une résolution analogue à celle effectuée pour z, mais la famille de solution admet maintenant un argument et une constante d'intégration K complexe. Nous la déterminons en ajustant la valeur initiale de la vitesse, nulle selon y :

$$\underline{\dot{u}} = K \exp\left(-\left(\frac{1}{\tau} + j\omega\right)t\right) \text{ avec } \underline{\dot{u}}(0) = v_{0x} + j0 \Rightarrow K = v_{0x} \Rightarrow \underline{\dot{u}} = v_{0x} \exp\left(-\left(\frac{1}{\tau} + j\omega\right)t\right)$$

$$\underline{\dot{u}} = v_{0x} [\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)] \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v_{0x} \cos(\omega t) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \\ \dot{y} = v_{0x} \sin(\omega t) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \end{cases}$$

3. la position finale de la particule s'obtient en faisant tendre le temps vers l'infini dans les expressions de x, y et z. Pour cette dernière, nous trouvons :

$$z_f = \lim_{t \rightarrow \infty} z = \tau v_{0z}$$

Pour les coordonnées x et y, il est judicieux d'intégrer d'abord la vitesse complexe pour accéder à \underline{u} avant d'extraire les coordonnées.

$$\underline{\dot{u}} = v_{0x} \exp\left(-\left(\frac{1}{\tau} + j\omega\right)t\right) \Rightarrow \underline{u} = -\frac{v_{0x}}{\left(\frac{1}{\tau} + j\omega\right)} \exp\left(-\left(\frac{1}{\tau} + j\omega\right)t\right) + L$$

À l'instant initial, la particule est en $\underline{u} = 0$ soit :

$$\underline{u}(0) = -\frac{v_{0x}}{\left(\frac{1}{\tau} + j\omega\right)} + L = 0 \Rightarrow L = \frac{v_{0x}}{\left(\frac{1}{\tau} + j\omega\right)}$$

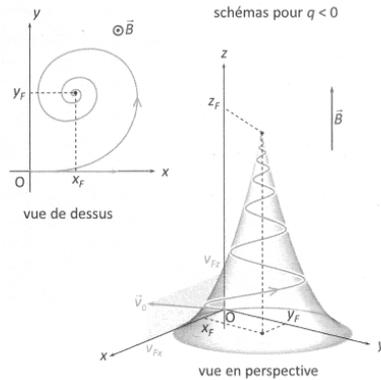
$$\Rightarrow \underline{u} = \frac{v_{0x}}{\left(\frac{1}{\tau} + j\omega\right)} \left[1 - \exp\left(-\left(\frac{1}{\tau} + j\omega\right)t\right)\right]$$

La limite de cette expression en plus l'infini est la constante L dont nous pouvons extraire x_f et y_f .

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{u} = L \Rightarrow x_f + jy_f = \frac{v_{0x}}{\left(\frac{1}{\tau} + j\omega\right)}$$

$$\Rightarrow x_f = \frac{v_{0x} \tau}{(1 + \omega^2 \tau^2)} \quad \text{et} \quad y_f = -\frac{v_{0x} \omega \tau^2}{(1 + \omega^2 \tau^2)}$$

S Les coordonnées cartésiennes sont généralement les mieux adaptées à l'étude du mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétostatique, parce qu'elles permettent une écriture simple des produits vectoriels. Les équations du mouvement sont couplées par ce produit vectoriel, mais peuvent être combinées puis résolues en utilisant les notations complexes.



M4.4. Sélecteur d'isotopes.

1. Vitesses des ions -

Dans le référentiel \mathcal{J} où l'on des plaques M et N, une particule de masse m_i est soumise entre les deux plaques à :

- l'action du champ du champ électrique horizontale crée par la tension $U = V_N - V_M > 0$
- à l'action de la pesanteur qui ici est négligée.
- à l'action des autres particules qui elle aussi est négligée.

On utilise le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2} m_i \vec{v}_N^2 - \frac{1}{2} m_i \vec{v}_M^2 = W_{M \rightarrow N}^F = q \vec{E} \cdot \vec{MN} = -q (V_N - V_M) = qU$$

$$v_{iN} = \left(\frac{2qU}{m_i} \right)^{1/2}$$

$$v_{iN}({}^{10}\text{Ne}^+) = v_{iN} = 4,4 \cdot 10^5 \text{ m.s}^{-1}$$

$$v_{iN}({}^{22}\text{Ne}^+) = v_{iN} = 4,2 \cdot 10^5 \text{ m.s}^{-1}$$

2.a. Equation de la trajectoire

Les ions sont classés par une force électrique dirigée verticalement.

La loi de Newton s'écrit pour un ion de masse m_i :

$$q \vec{E} = m_i \vec{a}_i \rightarrow \vec{a}_i = \frac{q}{m_i} \vec{E}$$

$$\vec{a}_i \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = \frac{q}{m_i} E \\ \ddot{z} = 0 \end{cases} \quad \vec{v}_i \begin{cases} \dot{x} = v_{iN} \\ \dot{y} = \frac{q}{m_i} E t \\ \dot{z} = 0 \end{cases} \quad \vec{NP}_i \begin{cases} x = v_{iN} t \\ y = \frac{1}{2} \frac{q}{m_i} E t^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

Entre les plaques le mouvement d'un ion i est plan et la trajectoire est une parabole d'équation :

$$y = \frac{1}{2} \frac{qE}{m_i} \frac{x^2}{v_{iN}^2}$$

3.b. Trajectoire à la sortie du condensateur -

Une fois sorti de l'espace interarmatures du condensateur, un ion est soumis à la pesanteur mais dont on néglige l'effet.

La trajectoire est une droite dont il faut déterminer le pente et un point.

3. c. Point d'impact I.

Le point d'impact I correspond à l'intersection de la trajectoire avec l'écran en $x = l + l'$. Soit

$$y_I = \frac{1}{2} \frac{U}{U'} \frac{l}{d} \left(l' + \frac{l}{2} \right)$$

On peut noter que y_I est proportionnelle à la tension U appliquée, c'est cette propriété qui est utilisée dans un oscilloscope analogique.

3. a. Rayon de la trajectoire.

Dans un champ magnétique permanent une particule chargée de masse m_i pénétrant dans l'espace où règne ce champ avec une v. linéaire homogène de \vec{v}_i à \vec{B} est animée d'un mouvement circulaire et uniforme de rayon :

$$R_i = \frac{m_i v_i}{q B}$$

3. b. Séparation des isotopes.

On compare les deux rayons :

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{m_1 v_{1N}}{m_2 v_{2N}} = \frac{m_1}{m_2} \left(\frac{390'}{m_1} \right)^{1/2} \left(\frac{m_2}{290'} \right)^{1/2} = \frac{m_1}{m_2} \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^{1/2}$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^{1/2} \neq 1$$

Ce mauvais dispositif permet donc de séparer les deux types d'ions.

4. a. Valeur de E

Les ions sont soumis à deux forces dans la zone où coexistent les deux champs : $\vec{F}_e = q \vec{E}$ et $\vec{F}_m = q \vec{v} \wedge \vec{B}$.

L'ion ${}^{10}_{10}\text{Ne}^+$ est animé d'un mouvement rectiligne uniforme

$$\vec{F}_e + \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} = -\vec{v} \wedge \vec{B} = -\vec{v}_N \wedge \vec{B}$$

$$E = v_N B = \left(\frac{390'}{m_1} \right)^{1/2} B \quad E = 4,4 \cdot 10^4 \text{ V}$$

La pente p est la dérivée de la trajectoire en $x = l$, abscisse du point de sortie du condensateur. On l'obtient en dérivant l'équation de la trajectoire :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{qE}{m_i v_i^2} x \rightarrow p = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=l} = \frac{qE}{m_i v_i^2} l$$

Le point de sortie du condensateur est un point particulier S_i de cette trajectoire dont les coordonnées sont :

$$x_{S_i} = l, \quad y_{S_i} = \frac{qE}{2 m_i v_i^2} l^2$$

Comme $U = \frac{E}{d}$ et que $v_{iN} = \left(\frac{390'}{m_i} \right)^{1/2}$ les coordonnées de S_i sont :

$$x_{S_i} = l, \quad y_{S_i} = \frac{1}{2} \frac{qE}{m_i} \frac{m_i}{290'} l^2 = \frac{1}{4} \frac{E}{U'} l^2$$

$$x_{S_i} = l, \quad y_{S_i} = \frac{1}{4d} \frac{U}{U'} l^2$$

Le point de sortie est le même pour les deux ions $\Rightarrow S_i = S$. L'équation de la droite après le sortie est :

$$y_i - y_s = p(x - x_s) \Rightarrow y_i = \frac{qEl}{m_i v_i^2} (x - l) + y_s$$

$$y_i = \frac{qEl}{m_i} \frac{m_i}{390'} (x - l) + \frac{1}{4d} \frac{U}{U'} l^2$$

$$y_i = \frac{1}{2} \frac{El}{U'} (x - l) + \frac{1}{4d} \frac{U}{U'} l^2 \quad \text{car } E = \frac{U}{d}$$

$$y_i = \frac{1}{2} \frac{Ul}{U'd} (x - l) + \frac{1}{4} \frac{Ul^2}{U'd} = \frac{1}{2} \frac{Ul}{U'd} \left(x - l + \frac{1}{2} l \right)$$

$$y_i = \frac{1}{2} \frac{Ul}{U'd} \left(x - \frac{l}{2} \right)$$

On peut remarquer que l'équation de la trajectoire à la sortie du condensateur est la même pour les deux ions. Le dispositif étudié ne permet donc pas de séparer les deux espèces d'ions.

4_b - Application du dispositif -

Les ions arrivent au point N, les ions ${}^{24}_{10}\text{Ne}^+$ sont plus lents que les ions ${}^{20}_{10}\text{Ne}^+$. Par conséquent la force électrique l'emportera sur la force magnétique - Les ions ne passeront pas par O - Ainsi seuls les ions ${}^{20}_{10}\text{Ne}^+$ passeront par ce point O - Le dispositif permet donc de sélectionner l'isotope 20 du néon -