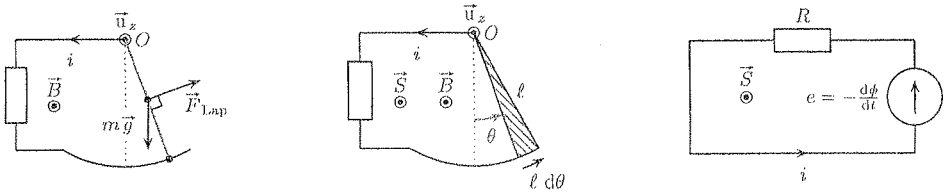
I5. Circuit Mobile dans un champ magnétique stationnaire. Exercices. Corrigés.

I5.1. Pendule conducteur dans un champ magnétique.



1. Étant donné que la barre a un mouvement de rotation autour de l'axe $(O,\vec{u}_z)$, c'est l'application du théorème du moment cinétique par rapport à cet axe qui donnera l'équation du mouvement. Il faut donc déterminer les moments par rapport à cet axe des actions subies par la barre. L'orientation de l'axe $(O,\vec{u}_z)$ donne l'orientation du plan par la règle de la main droite : le sens positif de rotation est le sens trigonométrique. La barre est soumise à son poids $m\vec{g}$ qui s'applique en son centre d'inertie, situé à la distance $\frac{\ell}{2}$ du point O car la barre est homogène (voir schéma). Le bras de levier du poids par rapport à l'axe $(O,\vec{u}_z)$ est donc $\frac{\ell}{2}\sin\theta$ et le moment scalaire du poids $\mathscr{M}_{\text{poids}} = -mg\frac{\ell}{2}\sin\theta$. Le signe « moins » vient du fait que, si $\theta > 0$ (cas du schéma), le poids a tendance à faire tourner la barre dans le sens négatif. La force de Laplace s'écrit, en coordonnées cylindriques d'axe $(O,\vec{u}_z)$, $\vec{F}_{\text{Lap}} = i\ell B\,\vec{u}_\theta$ et s'applique au milieu de la barre. Son bras de levier est la distance $\frac{\ell}{2}$ (voir schéma), donc le moment scalaire de cette force est $\mathscr{M}_{\text{la}} = +\frac{1}{2}i\ell^2 B$. Le signe « plus » traduit que cette force fait tourner la barre dans le sens positif quand i et B sont positifs. Enfin, la liaison pivot entre la barre et l'axe $(O,\vec{u}_z)$ est parfaite, donc exerce un moment nul sur la barre. Le théorème du moment cinétique appliqué à la barre s'écrit, en projection sur l'axe $(O,\vec{u}_z)$,

$$J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = \mathscr{M}_{\text{poids}} + \mathscr{M}_{\text{la}} \quad\Rightarrow\quad J\ddot{\theta} = -mg\frac{\ell}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}i\ell^2 B\ .$$

2. Le vecteur surface $\vec{S}$ du circuit est orienté par i et la règle de la main droite, donc $\vec{S} = S\,\vec{u}_z$, où S est l'aire du circuit (inconnue par manque de données géométriques). Le flux magnétique à travers le circuit est $\phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = BS$ et la fem induite, orientée en convention générateur, est donnée par la loi de Faraday : $e = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -B\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$. Ce n'est donc pas l'aire S qui importe, mais sa dérivée temporelle. Entre deux instants voisins t et $t+\mathrm{d}t$, la barre se déplace d'un angle élémentaire $\mathrm{d}\theta$ et balaie la surface élémentaire $\mathrm{d}S$ hachurée sur le schéma. Il s'agit approximativement d'un triangle de base élémentaire $\ell\,\mathrm{d}\theta$ et de hauteur ℓ. Son aire est donc $\mathrm{d}S = \frac{1}{2}\ell\times\ell\,\mathrm{d}\theta$ et correspond à l'accroissement (algébrique) de l'aire S. En divisant par $\mathrm{d}t$, $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\ell^2\dot{\theta}$ et la fem est $e = -\frac{1}{2}B\ell^2\dot{\theta}$. Le schéma électrique équivalent donne l'équation $e = Ri$, donc $i = \frac{e}{R} = -\frac{1}{2}\frac{B\ell^2}{R}\dot{\theta}$.

3. On remplace i par cette expression dans l'équation mécanique et on utilise l'approximation $\sin\theta \simeq \theta$, valable pour l'étude des petits mouvements au voisinage de $\theta = 0$. On obtient l'équation du mouvement,

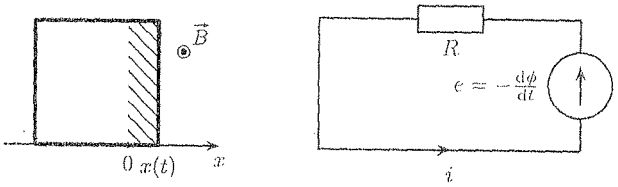
$$\ddot{\theta} + \frac{B^2\ell^4}{4JR}\dot{\theta} + \frac{mg\ell}{2J}\theta = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \ddot{\theta} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \ \text{ avec } \ \omega_0^2 \overset{\text{déf.}}{=} \frac{mg\ell}{2J} \ \text{ et } \ \frac{\omega_0}{Q} \overset{\text{déf.}}{=} \frac{B^2\ell^4}{4JR}\ .$$

4. Si la barre est abandonnée sans vitesse initiale depuis une position $\theta_0 \neq 0$, l'équation du mouvement donne deux régimes différents en fonction de la valeur du facteur de qualité Q. Si $Q < \frac{1}{2}$, le mouvement est amorti et apériodique (absence d'oscillations car les solutions sont exponentielles décroissantes). Si $Q > \frac{1}{2}$, le mouvement est pseudo-périodique amorti car la solution mathématique est le produit d'une sinusoïde par une exponentielle décroissante. On mémorise facilement les deux cas par la phrase suivante : « le facteur de qualité mesure la qualité des oscillations ». Ainsi, un facteur de qualité grand correspond au cas où il y a de « bonnes » oscillations. Dans ce cas, la valeur numérique de Q donne un ordre de grandeur du nombre d'oscillations ayant lieu avant amortissement complet. En utilisant la définition de ω_0^2 et $\frac{\omega_0}{Q}$, on obtient $Q = \frac{R}{B^2}\sqrt{\frac{8mgJ}{\ell^7}}$. On constate que Q croît avec R, donc une grande résistance permet de bonnes oscillations et une résistance trop faible empêche les oscillations. C'est normal car une résistance faible permet la circulation d'un fort courant induit, donc une force de Laplace intense. Or, d'après la loi de modération de Lenz, cette force tend toujours à s'opposer au mouvement de la barre (freinage magnétique). Une faible résistance donne donc lieu à un fort freinage et atténue immédiatement tout mouvement de la barre. La valeur qui sépare les deux types de régimes correspond au régime critique, défini par $Q = \frac{1}{2}$, ce qui donne la résistance critique $R_c = \frac{B^2}{2}\sqrt{\frac{\ell^7}{8mgJ}}$.

I5.2. Freinage magnétique.

1. Tant que le cadre n'est pas arrivé dans le champ magnétique, aucun phénomène d'induction ne se passe (flux magnétique nul à travers le cadre) et il n'y a pas de courant induit dans le cadre, donc pas de forces de Laplace. Le cadre est donc un simple solide qui se translate horizontalement sans frottements : sa vitesse est constante. De même, si le cadre baigne complètement dans le champ magnétique uniforme, il est traversé par un flux magnétique constant.

Il n'y a pas de phénomène d'induction et la vitesse est constante. C'est donc seulement quand le cadre entre dans le champ magnétique ($x \in [0,\ell]$) que le flux magnétique varie et donne lieu à un courant induit. On oriente le courant (arbitrairement) dans le sens trigonométrique. La zone du cadre traversée par le champ magnétique est un rectangle de hauteur ℓ et de largeur



$x(t)$, hachuré sur la figure . Avec l'orientation choisie, son vecteur surface est $\vec{S} = \ell x\,\vec{u}_z$. Le flux magnétique correspondant est $\phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = B\ell x$ et la fem induite dans le cadre est, en convention générateur, $e = -\frac{d\phi}{dt} = -B\ell\frac{dx}{dt} = -B\ell v(t)$. D'après le schéma électrique équivalent, $e = Ri$, donc $i = -\frac{B\ell v}{R}$ (équation électrique du problème). D'après la règle des trois doigts, les forces de Laplace s'exerçant sur les côtés haut et bas du cadre sont verticales. Elles sont donc sans influence sur le mouvement horizontal du cadre. Seule la force de Laplace s'exerçant sur le côté droit du cadre est pertinente : $\vec{F}_{la} = i\ell\,\vec{u}_y \wedge B\,\vec{u}_z = i\ell B\,\vec{u}_x$. La loi de la quantité de mouvement appliquée au cadre dans le référentiel galiléen d'étude s'écrit $\sum\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$, soit, en projection sur $\vec{u}_x$, $F_{la} = m\frac{dv}{dt}$,

$$i\ell B = -\frac{B^2\ell^2 v}{R} = m\frac{dv}{dt} \quad\Rightarrow\quad \frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau}v = 0 \quad \text{avec} \quad \tau \overset{\text{déf.}}{=} \frac{mR}{B^2\ell^2} \ .$$

2. En prenant pour origine des temps $t = 0$ l'instant où le cadre pénètre dans le champ ($x = 0$ et $v = v_0$), cette équation se résout en $v(t) = v_0\,\exp(-t/\tau)$. La position du cadre est l'intégrale de la vitesse,

$$x(t) = \int_0^t v(t)\,dt = \int_0^t v_0\,\exp(-t/\tau)\,dt \quad\Rightarrow\quad x(t) = v_0\tau\,[1-\exp(-t/\tau)] \ .$$

Rappelons que ces équations ne sont valables que pour $x \in [0,\ell]$. En dehors de cet intervalle, la vitesse du cadre est constante.

3. En reprenant l'expression trouvée pour la vitesse, la question posée se traduit par $\alpha v_0 = v_0\,\exp(-T/\tau)$, donc $\alpha = \exp(-T/\tau)$ et $T = -\tau\,\ln\alpha$. L'expression de α montre que $\alpha \in [0,1]$, ce qui signifie que le cadre ne peut que ralentir. C'est normal d'après la loi de modération de Lenz : en entrant dans le champ magnétique, les phénomènes d'induction se déclenchent et tendent à s'opposer aux causes qui leur ont donné naissance (le mouvement du cadre). On traduit que le cadre finit d'entrer dans le champ à $t = T$ par $\ell = v_0\tau[1-\exp(-T/\tau)]$, soit, d'après l'expression de T, $\ell = v_0\tau(1-\alpha)$. En remplaçant τ par son expression, on obtient $|B| = \sqrt{\frac{(1-\alpha)v_0 mR}{\ell\times\ell^2}}$. Il ne faut pas oublier la valeur absolue, car B intervient au carré dans les calculs. Comme d'habitude, on trouve que le sens du champ magnétique est sans influence sur le phénomène de freinage magnétique. L'intensité du champ nécessaire au freinage croît avec m et v_0 : plus le cadre est lourd et rapide, plus il faut un champ intense pour le freiner. Plus la résistance R est grande, plus $|B|$ doit l'être. C'est normal car R grand diminue l'intensité possible des courants induits, donc des forces de Laplace ralentisseuses. La longueur ℓ intervient au dénominateur. Plus le cadre est grand, moins le champ a besoin d'être intense. Il y a deux raisons à cela.

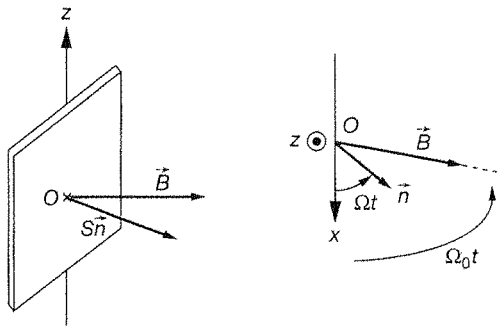
- La durée d'entrée dans le champ est alors plus grande et le ralentissement peut s'effectuer sur plus de temps (c'est l'influence du terme ℓ seul).
- Le terme ℓ^2 vient de l'expression de la force de Laplace, qui est d'autant plus intense que la longueur du côté vertical droit du cadre est grande.

Enfin, $\alpha \in [0,1]$. Plus α est faible, plus la vitesse finale est faible, donc plus le freinage doit être intense, ce qui s'obtient avec un champ fort. Il est donc normal que $|B|$ décroisse avec α.

4. On peut remarquer que l'arrêt complet du cadre (cas où $\alpha = 0$) nécessite un temps infini ($T \to +\infty$ si $\alpha \to 0$), car la vitesse ne fait que tendre vers zéro sans jamais l'atteindre (décroissance exponentielle). En prenant $\alpha = 0$ (arrêt complet) et les valeurs numériques proposées, on trouve $B \simeq 10\,\mathrm{T}$ pour le cas $\ell = 10\,\mathrm{cm}$ et $B \simeq 3{,}1 \cdot 10^{-1}\,\mathrm{T}$ pour le cas $\ell = 1{,}0\,\mathrm{m}$. Le champ de 0,31 tesla est éventuellement réalisable à l'aide d'un gros électroaimant, mais le champ de 10 teslas ne l'est pas . Pour s'affranchir de ces problèmes, on peut bobiner le cadre pour multiplier les forces de Laplace par le nombre de tours de fil. Cela fait cependant croître la masse du cadre ainsi que la résistance totale du fil.

I5.5. Convertisseur asynchrone.

a) Qualitativement, on peut justifier l'apparition d'un courant induit dans le cadre par la variation du flux du champ magnétique $\vec{B}$: une force électromotrice apparaît alors, dont l'expression peut être calculée par application de la loi de Faraday. Analytiquement, puisque le champ est uniforme, on peut exprimer le flux par : $\Phi = \vec{B} \cdot S\vec{n}$



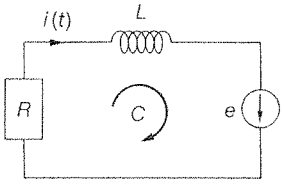
La surface en question est $S = Na^2$ et l'angle que font la normale et le champ varie au cours du temps comme $\theta = (\Omega - \Omega_0)\,t$. Finalement,

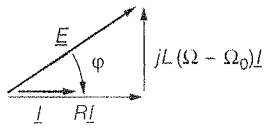
$$\Phi = B_0 N a^2 \cos[(\Omega - \Omega_0)\,t].$$

On pose dans la suite $\Phi_0 = B_0 N a^2$, l'application de la loi de Faraday conduit à l'expression de la force électromotrice d'induction mutuelle :

$$e = \Phi_0\,(\Omega - \Omega_0)\sin[(\Omega - \Omega_0)\,t].$$

Le phénomène d'induction pris en compte jusqu'à présent comprend l'induction mutuelle due au champ magnétique externe ; mais l'apparition d'un courant induit crée à son tour un champ magnétique propre, donc un flux propre. On peut rendre compte de cet aspect dans le schéma équivalent électrique , où l'induction propre est représentée par l'inductance L.





Le circuit R-L est excité par une force électromotrice variant sinusoïdalement dans le temps, donc en régime établi, l'intensité du courant varie sinusoïdalement avec la même pulsation $\Omega - \Omega_0$ (il s'agit du régime forcé pour un système linéaire soumis à une excitation harmonique).

On cherche donc l'intensité sous la forme

$$i(t) = I_m \sin[(\Omega - \Omega_0)\,t + \varphi].$$

Le recours à la notation complexe s'impose :

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{R + jL(\Omega - \Omega_0)}$$

et on retrouve les résultats connus :

$$I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + L^2(\Omega - \Omega_0)^2}}$$

et

$$\tan\varphi = -\frac{L(\Omega - \Omega_0)}{R}.$$

b) Du fait de l'apparition du courant dans le cadre, on se trouve en présence d'un circuit baignant dans un champ magnétique uniforme. Le cadre est donc assimilé à un dipôle magnétique $\vec{m} = iS\vec{n}$ et le couple de forces de Laplace qu'il subit s'écrit :

$$\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}_0 = -iSB_0 \sin(\Omega - \Omega_0)\,t\,\vec{u}_z.$$

Ce couple est dirigé selon l'axe Δ, on s'intéresse à sa projection sur Oz (moment par rapport à Δ) :

$$C = -iSB_0 \sin(\Omega - \Omega_0)t$$
$$= -I_m \Phi_0 \sin[(\Omega - \Omega_0)t] \sin[(\Omega - \Omega_0)t + \varphi].$$

En valeur moyenne,

$$\langle \sin[(\Omega - \Omega_0)t] \sin[(\Omega - \Omega_0)t + \varphi] \rangle = \frac{1}{2} \cos\varphi,$$

donc :

$$\langle C \rangle = -\frac{\Phi_0^2}{2} \frac{\Omega - \Omega_0}{\sqrt{R^2 + L^2(\Omega - \Omega_0)^2}} \cos\varphi.$$

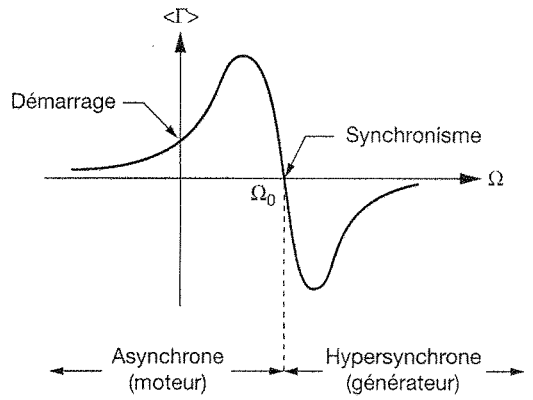
Or d'après la relation entre les amplitudes complexes de l'intensité et de la force électromotrice, φ est l'argument de l'impédance complexe du circuit R-L, donc :

$$\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2(\Omega - \Omega_0)^2}}.$$

On obtient finalement l'expression du couple moyen :

$$\langle C \rangle = -\frac{\Phi_0^2}{2} \frac{R(\Omega - \Omega_0)}{R^2 + L^2(\Omega - \Omega_0)^2}.$$

c) Le graphe a l'allure représentée à la figure :



d) Tant que la vitesse angulaire du cadre est inférieure à celle du champ, le couple est positif. On peut invoquer la loi de modération : le courant induit provient de la variation du flux du champ magnétique, qui est elle-même due à l'écart de vitesse entre cadre et champ. Les forces de Laplace ont donc pour effet d'entraîner le cadre dans le sens lui permettant de rattraper le champ. Au contraire, en fonctionnement hypersynchrone, la vitesse du cadre excède celle du champ, les forces de Laplace dues au courant induit jouent un rôle de frein : le couple est négatif.

Au synchronisme, $\Omega = \Omega_0$, il n'y a plus de mouvement relatif : le flux est constant donc le courant induit nul. Le couple est alors inexistant ; le moindre couple résistant (frottement...) suffit à faire ralentir le moteur. En pratique, on n'observe pas de fonctionnement à la vitesse de synchronisme Le terme asynchrone (a privatif) désigne cette propriété.

On constate qu'à vitesse nulle le couple est positif : ce moteur peut démarrer.