

## Transfert d'un satellite.

1 • Sur l'orbite circulaire de rayon  $R$ , on a :

$$m \frac{v_0^2}{R} = mg_0 \text{ d'où } v_0 = \sqrt{g_0 R}.$$

$$2 \bullet v_0 = R\omega_0 = R \frac{2\pi}{T_0}$$

$$T_0 = \frac{2\pi R}{\sqrt{g_0 R}} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g_0}}.$$

$$3 \bullet v_E = R \frac{2\pi}{T_1}$$

$$\frac{v_E}{v_0} = \frac{T_0}{T_1}$$

$$\left(\frac{v_E}{v_0}\right)^2 = \frac{4\pi^2}{T_1^2} \frac{R}{g_0}$$

$$4 \bullet \text{A.N. : } \left(\frac{v_E}{v_0}\right)^2 = 3,45 \cdot 10^{-3}.$$

$$5 \bullet \vec{F} = -G \frac{mM}{r^2} \vec{u}_r = m\vec{g}. \quad g = \frac{GM}{r^2} \text{ et } g_0 = \frac{GM}{R^2}.$$

$$\text{Donc } g = g_0 \frac{R^2}{R_1^2} \text{ à la distance } r = R_1.$$

6 • La période du satellite sur l'orbite  $C_1$  doit être  $T_1$ .

$$m\omega_1^2 R_1 = mg = mg_0 \frac{R^2}{R_1^2}.$$

$$R_1^3 = g_0 \frac{R^2}{\omega_1^2} = g_0 \frac{R^2}{4\pi^2} T_1^2.$$

$$R_1 = 4,24 \cdot 10^7 \text{ m.}$$

$$x = \frac{R_1}{R} = 6,62.$$

$$7 \bullet m \frac{v_1^2}{R_1} = \frac{GmM}{R_1^2} \quad v_1^2 = \frac{GM}{R_1}$$

$$\text{De même } v_0^2 = \frac{GM}{R}.$$

On en déduit :

$$v_1 = \frac{v_0}{\sqrt{x}}.$$

8 • Sur l'orbite  $C_1$ , l'énergie du satellite est :

$$E_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{GmM}{R_1} = -\frac{1}{2} m v_1^2.$$

$$\text{Sur la Terre : } E = \frac{1}{2} m v_E^2 - \frac{GmM}{R} = \frac{1}{2} m v_E^2 - m v_0^2.$$

Le travail  $W$  à fournir pour passer à  $C_1$  est :

$$W = E_1 - E = -\frac{1}{2} m v_E^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 + m v_0^2 \approx +\frac{1}{2} m v_0^2 \left(2 - \frac{1}{x}\right)$$

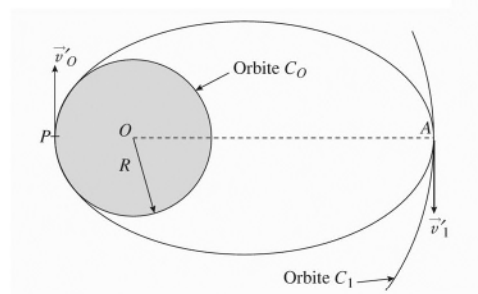
$$W = K_0 \left(2 - \frac{1}{x}\right).$$

9 • Lorsque le satellite est sur Terre, son énergie est :

$$E = \frac{1}{2} m v_E^2 - \frac{GmM}{R}.$$

$$W_1 = E_0 - E \approx -\frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{GmM}{R} = +\frac{1}{2} m v_0^2.$$

$$W_1 = K_0.$$



10 • Le transfert se fait sur une ellipse de demi-grand axe  $\frac{R + R_1}{2}$ .

$$E_{\text{ellipse}} = -\frac{GmM}{R + R_1} = \frac{1}{2} m v_0'^2 - \frac{GmM}{R}.$$

$$v_0'^2 = 2GM \frac{R_1}{R(R + R_1)} = \frac{2GM}{R} \frac{x}{1 + x}$$

$$v_0'^2 = v_0^2 \frac{2x}{1 + x}$$

$$v_0' = v_0 \sqrt{\frac{2x}{1 + x}}.$$

11 •  $W_2 = E_{\text{ellipse}} - E_0$

$$W_2 = -\frac{GmM}{R + R_1} + \frac{GmM}{2R} = GmM \frac{R_1 - R}{2R(R + R_1)}.$$

$$W_2 = K_0 \frac{x - 1}{x + 1}.$$

12 • Au point A, on a :

$$E_{\text{ellipse}} = -\frac{GmM}{R_1} + \frac{1}{2} m v_1'^2 = -\frac{GmM}{R + R_1}.$$

$$v_1' = v_0 \sqrt{\frac{2}{x(1 + x)}}.$$

13 •  $W_3 = E_1 - E_{\text{ellipse}} = -\frac{GmM}{2R_1} + \frac{GmM}{R + R_1}$

$$W_3 = K_0 \frac{x - 1}{x(1 + x)}.$$

$$\begin{aligned} W_1 + W_2 + W_3 &= K_0 \left(1 + \frac{x - 1}{x + 1} + \frac{x - 1}{x(1 + x)}\right) \\ &= K_0 \frac{2x^2 + x - 1}{x(1 + x)} = K_0 \left(2 - \frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

$$W_1 + W_2 + W_3 = W.$$

14 • La troisième loi de Kepler donne :

$$T_{\text{ellipse}}^2 = \frac{4\pi^2}{GM} \left(\frac{R + R_1}{2}\right)^3 \text{ et } T_1^2 = \frac{4\pi^2}{GM} R_1^3.$$

$$T_{\text{ellipse}} = T_1 \left(\frac{R + R_1}{2R_1}\right)^{3/2}$$

$$t = \frac{T_{\text{ellipse}}}{2} = \frac{T_1}{2^{5/2}} \left(\frac{1 + x}{x}\right)^{3/2}.$$



## Equilibre mécanique. Equilibre thermique.

### 1. Pression d'équilibre.

On étudie le système correspondant au contenu du cylindre {gaz dans les deux compartiments, piston}. On applique à ce système le premier principe entre l'état initial et un état pour lequel les températures sont  $T_1'$  et  $T_2'$  et l'équilibre mécanique réalisé, soit  $P_1' = P_2' = P$ .

On suppose que l'on peut négliger l'énergie cinétique du piston ainsi que les variations éventuelles de son énergie interne (piston de capacité thermique négligeable comme indiqué dans l'énoncé).

La fonction d'état énergie interne étant rigoureusement extensive dans le cas des gaz parfaits on a :

$$\Delta U = \Delta U_{gaz1} + \Delta U_{gaz2} = W^{nc} + Q$$

Or comme le système évolue à volume total constant et que d'autre part les parois du cylindre sont adiabatiques, on a :  $W^{nc} = 0$ ,  $Q = 0$ . Ainsi :

$$\Delta U = \Delta U_{gaz1} + \Delta U_{gaz2} = 0 \quad (1)$$

La variation d'énergie interne de  $n$  moles d'un gaz parfait s'écrit en introduisant la capacité thermique molaire  $C_{V,m}$  à volume constant :  $\Delta U = nC_{V,m}\Delta T$  (2) en prenant  $C_{V,m} = Cste$  sur l'intervalle de température considéré.

Soit ici d'après (1) et (2) :

$$n_1 C_{V1,m} (T_1' - T_1) + n_2 C_{V2,m} (T_2' - T_2) = 0 \quad (3)$$

On a le même gaz parfait dans les deux compartiments, d'où avec  $C_{V1,m} = C_{V2,m}$  :

$$n_1 (T_1' - T_1) + n_2 (T_2' - T_2) = 0 \quad (4)$$

L'énoncé suppose maintenant que l'équilibre mécanique s'est établi ( $P_1' = P_2' = P$ ) avec des températures des gaz différentes ( $T_1' \neq T_2'$ ). La loi des gaz parfaits donne alors pour les deux compartiments :

$$PV_1' = n_1 RT_1' \quad \text{et} \quad P_1 V_1 = n_1 RT_1$$
$$PV_2' = n_2 RT_2' \quad \text{et} \quad P_2 V_2 = n_2 RT_2$$

De plus, la conservation du volume total s'écrit :

$$V_1 + V_2 = V_1' + V_2'$$

On obtient :

$$V_1' + V_2' = \frac{R}{P} (n_1 T_1' + n_2 T_2') = V_1 + V_2 \quad (5)$$

On peut écrire (4) sous la forme :

$$n_1 T_1' + n_2 T_2' = n_1 T_1 + n_2 T_2 = \frac{P_1 V_1 + P_2 V_2}{R}$$

L'équation (5) devient :

$$\frac{R}{P} \frac{P_1 V_1 + P_2 V_2}{R} = V_1 + V_2$$

On obtient finalement :

$$\boxed{P = \frac{P_1 V_1 + P_2 V_2}{V_1 + V_2}} \quad (6)$$

### 2.i. Evolution à pression constante.

A partir du moment où il y a égalité des pressions de part et d'autre, le système ayant atteint l'équilibre mécanique (égalité des pressions) va également tendre vers l'équilibre thermique (égalité des températures).

La relation définissant  $P$  est indépendante de  $T_1'$  et  $T_2'$ . Il en résulte que l'évolution vers l'équilibre thermique

s'effectuera à pression constante (égale à  $P$  calculée au 1.), les volumes évoluant en même temps que les températures :

$$\frac{V_1'}{P_1'} = n_1 \frac{R}{P} = cste \quad \text{et} \quad \frac{V_2'}{P_2'} = n_2 \frac{R}{P} = cste'$$

### 2.ii. Température $T$ d'équilibre thermique.

À l'équilibre thermique :

$$T_1' = T_2' = T$$

D'après (4) à l'état d'équilibre thermique on a :

$$n_1 T + n_2 T = (n_1 + n_2) T = n_1 T_1 + n_2 T_2$$

D'où :

$$\boxed{T = \frac{n_1 T_1 + n_2 T_2}{n_1 + n_2}} \quad (7)$$

Les volumes finaux sont alors donnés par :

$$\frac{V_{1f}'}{n_1} = \frac{V_{2f}'}{n_2} = \frac{RT}{P} \quad \text{et} \quad V_{1f}' + V_{2f}' = V_1 + V_2$$

Soit :

$$\boxed{V_{1f}' = \frac{n_1}{n_1 + n_2} (V_1 + V_2) \quad V_{2f}' = \frac{n_2}{n_1 + n_2} (V_1 + V_2)}$$

### 2.iii. Blocage du piston.

Si le piston était resté bloqué, il y aurait eu uniquement transfert thermique entre les deux gaz, la relation (4) restant toujours valable. L'équilibre thermique atteint, la température  $T$  aurait donc été la même, mais avec des pressions différentes dans chaque compartiment :

$$\boxed{P_{1f}' = n_1 \frac{RT}{V_1} \quad P_{2f}' = n_2 \frac{RT}{V_2}}$$

## Eau liquide en équilibre avec sa vapeur.

1. Par définition, le titre en vapeur est donné par la relation :

$$x = \frac{m_v}{m}$$

D'autre part, en désignant par  $m_L$  la masse d'eau liquide, nous avons :

$$m = m_L + m_v$$

$$V_0 = v_L m_L + v_v m_v.$$

Soit encore :  $v_0 = \frac{V_0}{m} = v_L(1-x) + v_v x$

(où  $v_0$  représente le volume massique « global »).

D'où

$$x = \frac{v_0 - v_L}{v_v - v_L}$$

Application numérique :

$$v_L = 1,06 \text{ dm}^3 \cdot \text{kg}^{-1}; \quad v_v = 858 \text{ dm}^3 \cdot \text{kg}^{-1}; \quad v_0 = \frac{4,7}{9 \cdot 10^{-3}} = 522 \text{ dm}^3 \cdot \text{kg}^{-1}.$$

$$\text{D'où } x = \frac{522 - 1,06}{858 - 1,06} \Rightarrow x = 0,61.$$

2. a. La pression est maintenue constante  $P = P_0$ , et la température finale  $T_F = 478 \text{ K}$  est supérieure à la température  $T_0$  de l'équilibre liquide-vapeur (pour une pression  $P_0$ ). L'état du système (ramené à l'unité de masse) passe d'un mélange liquide-vapeur (point A) à celui de la vapeur (point B).

Appliquons alors le premier principe au fluide :

$$\Delta U = W_{\text{ext}} + Q.$$

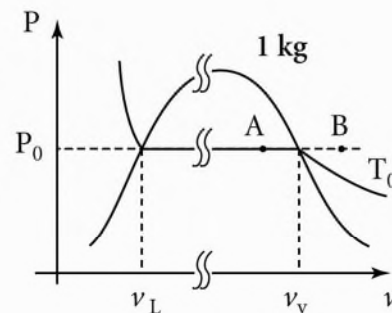
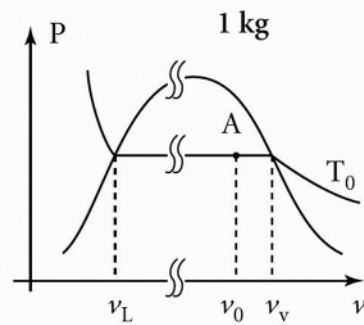
Le travail extérieur s'exprime simplement par

$$W_{\text{ext}} = -P_0 \Delta V, \text{ d'où :}$$

$$W_{\text{ext}} = -P_0(V_F - V_0).$$

Soit une énergie thermique  $Q$  fournie par le thermostat :

$$Q = U_F - U_I + P_0(V_F - V_0) = (U_F + P_0 V_F) - (U_I + P_0 V_0).$$



$$\text{Or } P_I = P_F = P_0 \quad \begin{cases} H_F = U_F + P_F V_F = U_F + P_0 V_F \\ H_I = U_I + P_I V_I = U_I + P_0 V_I \end{cases}$$

Finalement  $Q = H_F - H_I$  (**transformation isobare**), et en désignant par  $h$  les enthalpies massiques :

$$Q = m(h_F - h_I)$$

$h_I$  se calcule à partir des valeurs  $h_v$  et  $h_L$  des enthalpies massiques de la vapeur saturante et du liquide saturé, et du titre  $x$  en vapeur :

$$h_I = x h_v + (1 - x) h_L.$$

Quant à  $h_F$  il s'identifie à la quantité  $h''$ , d'où :

$$Q = m[h'' - x h_v - (1 - x) h_L]$$

*Application numérique :*

$$Q = 9 \cdot 10^{-3} [2890 - 0,61 \times 2710 - 0,39 \times 509] \Rightarrow Q = 9,38 \text{ kJ.}$$

**2. b.** Cette fois-ci, le volume reste égal à  $V_0$  et le premier principe s'écrit :

$$\Delta U = Q \Rightarrow Q = m(u_F - u_I)$$

où  $u_F$  et  $u_I$  désignent les énergies internes massiques dans les états final et initial.

L'état initial est toujours associé au point A.

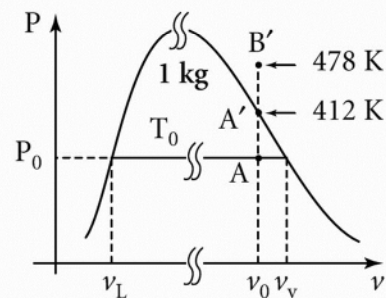
Pour l'état final, on a un volume massique  $v_0$  et une température  $T_F = 478 \text{ K}$  supérieure à celle du point A' ( $T_{A'} = 412 \text{ K}$  d'après les données) : cet état correspond à un point tel que B' pour lequel l'enthalpie massique vaut  $h'$  et la pression  $P' = 4,1 \text{ atm}$ .

Or  $u_F = h_F - P_F v_F$  avec  $h_F = h'$ ,  $P_F = P'$  et  $v_F = v_0$ , soit :  $u_F = h' - P' v_0$ .

De même  $u_I = h_I - P_I v_I$  avec  $h_I = h_v x + h_L(1 - x)$ ,  $P_I = P_0$  et  $v_I = v_0$ .

D'où

$$Q = m[(h' - P' v_0) - (h_v x + h_L(1 - x) - P_0 v_0)].$$



*Application numérique :*  $Q = 8,2 \text{ kJ}$ .

**3.** Les résultats des questions 2. a. et 2. b. nous montrent que l'énergie thermique fournie par le thermostat est plus grande pour la transformation à pression constante que pour la transformation à volume constant :

– dans le deuxième cas, l'énergie thermique reçue s'identifie à la variation d'énergie interne (volume constant), soit  $Q_2 = U_F - U_I$  ;

– dans le premier cas ( $P = P_0$ ), on a :

$$Q_1 + W_{\text{ext}} = U_F - U_I \Rightarrow Q_1 = (U_F - U_I) - W_{\text{ext}}.$$

La différence entre  $Q_1$  et  $Q_2$  provient donc pour l'essentiel de la quantité  $W_{\text{ext}}$  (en effet, pour la vapeur assimilable à un gaz parfait, on aurait  $U_F = U_F$ , puisque  $T_F = T_F = 478 \text{ K}$ ). Or dans cette dernière transformation, le volume augmente et  $W_{\text{ext}}$  est défini négatif, de sorte que  $Q_1 > Q_2$ , comme il se doit.

On a  $W_{\text{ext}} = -P_0 [m(v_F - v_0)]$ .

Les tables donnent  $v_F = 1,19 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$  (pour  $P = P_0 = 2 \text{ atm}$  et  $T = T_F$ ).

D'où  $W_{\text{ext}} \approx -2 \cdot 10^5 \times 9 \cdot 10^{-3} (1,19 - 0,522) \Rightarrow W_{\text{ext}} \approx -1,20 \text{ kJ}$ .

Or  $Q_1 - Q_2 = 9,35 - 8,18 = 1,17 \text{ kJ}$ .

Il y a bien accord ( $Q_1 - Q_2 \sim -W_{\text{ext}}$ ).