La dure vie d'un téléphone portable.

1. Le portable à l'horizontale est soumis à son poids s'appliquant en G et à la réaction de la table s'opposant au poids de la partie en contact avec la table, dont le point d'application se situe à l'intérieur de la surface de contact portable/table. Les moments de ces forces par rapport à Oz sont positifs et forceront le portable à pivoter autour de Oz.
2. À l'instant t, le portable est soumis à son poids s'appliquant en G : $\vec{P} = mg(\cos(\theta)\vec{u}_\theta + \sin(\theta)\vec{u}_r)$ et à la réaction de la table en O : $\vec{R} = R_\theta \vec{u}_\theta + R_r \vec{u}_r$.
3. $\vec{R}$ a un moment nul par rapport à Oz, et $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = mga\cos(\theta)\vec{u}_z$.
   Le portable étant en rotation autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire $\dot{\theta}\vec{u}_z$, son moment cinétique par rapport à (Oz) est $L_{Oz} = J\dot{\theta}$ et son énergie cinétique $E_c = \dfrac{1}{2}J\dot{\theta}^2$.
   La loi du moment cinétique scalaire par rapport à (Oz) appliquée au portable dans le référentiel galiléen $\mathscr{R}$ s'écrit : $J\ddot{\theta} = mga\cos(\theta)$.
4. Comme il n'y a pas de glissement en O, la puissance des actions de contact est nulle dans $\mathscr{R}$, et le poids dérive de l'énergie potentielle $E_p = -mga\sin(\theta)$: le système est conservatif et son énergie mécanique est $E_m = \dfrac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - mga\sin(\theta) = \text{cste} = 0$ par utilisation des conditions initiales, d'où l'intégrale première de l'énergie mécanique : $\dfrac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = mga\sin(\theta)$.
5. Le centre d'inertie G décrit un cercle de rayon a autour de Oz, son accélération dans $\mathscr{R}$ est ainsi $\vec{a} = -a\dot{\theta}^2\vec{u}_r + a\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$. La loi de la quantité de mouvement appliquée au portable en rotation autour de Oz amène à : $m(-a\dot{\theta}^2\vec{u}_r + a\ddot{\theta}\vec{u}_\theta) = mg(\cos(\theta)\vec{u}_\theta + \sin(\theta)\vec{u}_r) + R_\theta\vec{u}_\theta + R_r\vec{u}_r$.
   On en déduit : $R_r = -ma\dot{\theta}^2 - mg\sin(\theta)$ et $R_\theta = ma\ddot{\theta} - mg\cos(\theta)$.
   En utilisant les questions 3. et 4., on aboutit à :
   $R_r = -mg\left(\dfrac{2ma^2}{J} + 1\right)\sin(\theta)$ et $R_\theta = mg\left(\dfrac{ma^2}{J} - 1\right)\cos(\theta) < 0$, ce qui est conforme aux lois de Coulomb.
6. Le téléphone ne glisse pas tant que $|R_r| < f|R_\theta|$, soit tant que $\tan(\theta) < f\dfrac{1 - \dfrac{ma^2}{J}}{\dfrac{2ma^2}{J} + 1} = \tan(\theta_0)$.

   On aboutit donc à $\theta_0 = \arctan\left(f\dfrac{J - ma^2}{J + 2ma^2}\right) = 7{,}1°$.

Le départ du Capitaine R. Essort.

On étudie la bille dans le référentiel terrestre galiléen. Elle est soumise à son poids, à la force de rappel élastique $\overrightarrow{T}$ du ressort et à la réaction $\overrightarrow{N}$ du cerceau qui est normale du fait de l'absence de frottement.

1. Le triangle OMB est isocèle en O donc les angles des sommets B et M sont égaux. Par ailleurs, la somme des angles d'un triangle vaut π. En explicitant ces deux conditions, on obtient $\alpha = \dfrac{\pi - \theta}{2}$.

2. Pour calculer la distance MB, on détermine son carré :

$$MB^2 = \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}\right)^2 = R^2 + R^2 + 2R^2\cos(\pi - \theta) = 4R^2\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

On en déduit $MB = 2R\left|\sin\dfrac{\theta}{2}\right|$.

3. Les forces qui s'appliquent sur le système sont conservatives (poids, force de rappel élastique) ou à puissance nulle (réaction du cerceau). On est donc dans un cas de conservation de l'énergie mécanique.

On détermine l'énergie potentielle dont dérive le poids : $E_{p_1} = mgy_M = -mgR\sin\theta$,

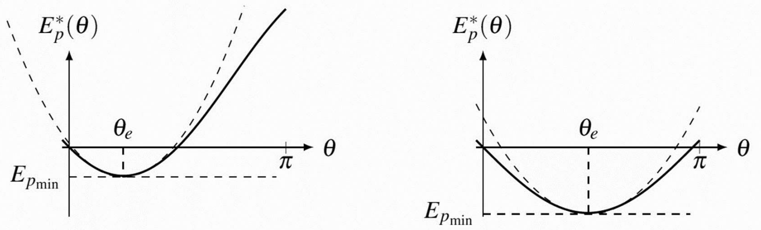
et celle dont dérive la force de rappel élastique : $E_{p_2} = \dfrac{1}{2}k\Delta\ell^2 = \dfrac{1}{2}kMB^2 = 2kR^2\sin^2\dfrac{\theta}{2}$.

L'énergie potentielle totale vaut donc :

$$E_p = -mgR\sin\theta + 2kR^2\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

Pour la représenter, on remarque que θ ne peut varier qu'entre 0 et π et on fixe $E_0 = mgR$ comme échelle d'énergie. On trace l'énergie potentielle sans dimension :

$$E_p^* = \frac{E_p}{E_0} = -\sin\theta + p\sin^2\frac{\theta}{2} \quad \text{avec} \quad p = \frac{2kR^2}{mgR}.$$



$p = 2$ $\qquad$ $p = 0.2$

Tracé de l'énergie potentielle pour deux valeurs de p.

L'énergie potentielle présente un minimum en θ_e entre 0 et π. La position de coordonnée θ_e est donc une position d'équilibre stable que l'on peut déterminer en recherchant le point d'annulation de la dérivée :

$$\left(\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\theta}\right)_{(\theta=\theta_e)} = 0 \quad\Rightarrow\quad \cos\theta_e - p\sin\frac{\theta_e}{2}\cos\frac{\theta_e}{2} = 0 \quad\Rightarrow\quad \cos\theta_e - \frac{p}{2}\sin\theta_e = 0,$$

soit :

$$\tan\theta_e = \frac{2}{p} = \frac{mg}{kR}.$$

La position d'équilibre est, comme on pouvait s'y attendre comprise entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$. Elle tend vers 0 lorsque la raideur du ressort est si grande que le poids de M ne peut pas l'étirer et vers $\dfrac{\pi}{2}$ lorsqu'elle est si faible que le poids de M l'étire facilement.

4. Si l'on écarte la bille de sa position d'équilibre stable et qu'on la lâche sans vitesse initiale, la bille va osciller dans le puits de potentiel. Si on l'en écarte faiblement, on s'attend à observer des oscillations harmoniques, tout se passant comme si la bille oscillait dans le potentiel harmonique tangent dessiné en pointillé sur la figure ci-dessus.

5. L'énergie cinétique du système vaut $E_c = \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$ puis l'énergie mécanique :

$$E_m = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - mgR\sin\theta + 2kR^2\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

Le mouvement étant conservatif, l'énergie mécanique est conservée et sa dérivée s'annule :

$$mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta} - mgR\cos\theta\,\dot{\theta} + 4kR^2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\dot{\theta} = 0 \quad\Rightarrow\quad \ddot{\theta} - \frac{g}{R}\left(\cos\theta - \frac{p}{2}\sin\theta\right) = 0.$$

6. On écarte M de sa position d'équilibre et on pose $\theta = \theta_e + \varepsilon$ puis :

$$\cos\theta = \cos(\theta_e + \varepsilon) = \cos\theta_e\cos\varepsilon - \sin\theta_e\sin\varepsilon = \cos\theta_e - \varepsilon\sin\theta_e$$
$$\sin\theta = \sin(\theta_e + \varepsilon) = \sin\theta_e\cos\varepsilon + \cos\theta_e\sin\varepsilon = \sin\theta_e + \varepsilon\cos\theta_e,$$

en utilisant les approximations $\cos\varepsilon \simeq 1$ et $\sin\varepsilon \simeq \varepsilon$.

On injecte alors ces relations dans l'équation du mouvement et on trouve :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\left(\sin\theta_e + \frac{p}{2}\cos\theta_e\right)\varepsilon - \frac{g}{R}\left(\cos\theta_e - \frac{p}{2}\sin\theta_e\right) = 0.$$

$\ddot{\theta} = \ddot{\varepsilon}$ puisque ε et θ diffèrent d'une constante. Le terme $\left(\cos\theta_e - \dfrac{p}{2}\sin\theta_e\right) = 0$ d'après la question 3. Comme θ_e est compris entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$, son sinus et son cosinus sont positifs.

$\dfrac{g}{R}\left(\sin\theta_e + \dfrac{p}{2}\cos\theta_e\right)$ est une grandeur positive homogène à une pulsation au carré. On pose donc $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{R}\left(\sin\theta_e + \dfrac{p}{2}\cos\theta_e\right)}$ et l'équation du mouvement devient :

$$\ddot{\varepsilon} + \omega_0^2\varepsilon = 0.$$

Comme prévu, le mouvement au voisinage d'une position d'équilibre stable est celui d'un oscillateur harmonique. Le calcul effectué permet d'en déterminer la pulsation ω_0.

Etude d'une lorgnette.

1. Système afocal. Distance *D*.

Pour que la lorgnette soit afocale, il faut que le foyer image F_1' de la lentille L_1 corresponde au foyer objet F_2 de la lentille L_2.

$$A_\infty \xrightarrow{L_1} F_1' = F_2 \xrightarrow{L_2} A_\infty'$$

On aura donc :

$$D = \overline{O_1O_2} = \overline{O_1F_1'} + \overline{F_1'O_2}$$

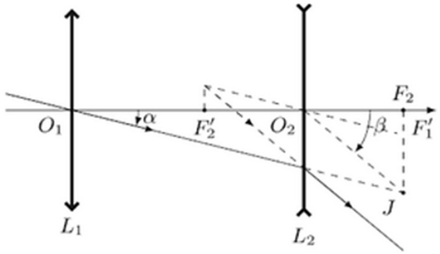
Comme les points F_1' et F_2 sont confondus :

$$D = \overline{O_1O_2} = \overline{O_1F_1'} + \overline{F_2O_2} = \overline{O_1F_1'} - \overline{O_2F_2} = \overline{O_1F_1'} + \overline{O_2F_2'}$$

$$\boxed{D = f_1' + f_2'}$$

A.N. $D = 10,0 - 3,0 = 7,0$ cm

2. Grossissement. Schéma.



Grace au tracé d'un rayon lumineux issus d'un point objet situé en dehors de l'axe optique à l'infini et dont le point image est J dans le plan focal objet de la lentille L_2 on peut remarquer que :

$$\tan\alpha = \frac{\overline{F_2J}}{\overline{O_1F_2}} \text{ et que } \tan\beta = \frac{\overline{F_2J}}{\overline{O_2F_2}}$$

En se plaçant dans l'approximation de Gauss, qui considère des rayons peu inclinés par rapport à l'axe optique et proches de cet axe, on peut dire que les angles définis sont petits et que les approximations suivantes sont possibles :

$$\tan\alpha \approx \alpha \text{ et } \tan\beta \approx \beta$$

On en déduit :

$$G = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\overline{O_1F_1'}}{\overline{O_2F_2}} = \frac{f_1'}{f_2}$$

$$\boxed{G = -\frac{f_1'}{f_2'}}$$

A.N. $G = \frac{10,0}{3,0} = 3,3$

3. Cercle oculaire.

Le cercle oculaire est l'image de la monture de l'objectif par l'oculaire. Son centre O_1' est l'image de O_1 par l'oculaire. Pour déterminer sa position par rapport à O_2 on utilise la relation de Descartes :

$$\frac{1}{\overline{O_2O_1'}} - \frac{1}{\overline{O_2O_1}} = \frac{1}{f_2'}$$

$$\overline{O_2O_1'} = \frac{f_2'.\overline{O_2O_1}}{f_2' + \overline{O_2O_1}} = -\frac{f_2'.D}{f_2' - D}$$

$$\overline{O_2O_1'} = -\frac{f_2'.(f_1' + f_2')}{f_2' - (f_1' + f_2')}$$

$$\boxed{\overline{O_2O_1'} = \frac{f_2'.(f_1' + f_2')}{f_1'}}$$

A.N. $\overline{O_2O_1'} = \frac{-3,0.(10,0 - 3,0)}{10,0} = -2,1$ cm

L'image du cercle oculaire se fait avant la lentille L_2. Le cercle oculaire est donc virtuel.

La taille du cercle oculaire est donnée par le grandissement de la lentille L_2 :

$$\gamma = \frac{d'}{d} = \frac{\overline{O_2O_1'}}{\overline{O_2O_1}} = -\frac{\overline{O_2O_1'}}{D}$$

$$\gamma = \frac{d'}{d} = -\frac{f_2'}{f_1'}$$

On obtient :

$$\boxed{d' = -\frac{f_2'}{f_1'}d}$$

A.N. $d' = \frac{3,0}{10,0}4,0 = 1,2$ cm

4. Champ de vision.

D'après la figure proposée on peut écrire :

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\frac{d'}{2}}{\overline{O_1'O}} = \frac{d'}{2\overline{O_1'O}}$$

Dans le cas où l'œil est collé à l'oculaire on a $\overline{O_1'O} = \overline{O_1'O_2}$. Ainsi :

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{f_2'.(f_1' + f_2')}{2f_1'}\frac{f_1'}{f_2'}d$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{(f_1' + f_2')}{2}d$$

$$\boxed{\theta = 2\arctan\left[\frac{(f_1' + f_2')}{2}d\right]}$$

A.N. $\theta = 0,557$ rad $= 31,9$ °

Le champ de vision avec la lorgnette est environ deux fois plus petit que celui de l'œil seul. Avec la lorgnette l'œil ne voit que les objets situés dans ce champ de vision que l'on vient de déterminer. La vision de l'espace est limitée d'où l'expression « voir par le petit bout de la lorgnette ».