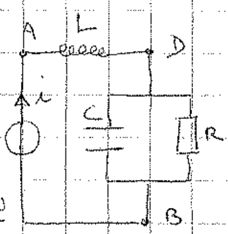
Association (L ; R//C) en régime sinusoïdal.

1. Expression de L.



On veut que $\underline{Z}_{AB} = R_e$

$$\underline{Z}_{AB} = jL\omega + \frac{R/jC\omega}{R+\frac{1}{jC\omega}}$$

$$\underline{Z}_{AB} = jL\omega + \frac{R}{1+jRC\omega} = \frac{R - RLC\omega^2 + jL\omega}{1+jRC\omega}$$

$e(t) = E_m \cos\omega t$

$$\underline{Z}_{AB} = (1-jRC\omega) \times \frac{R - RLC\omega^2 + jL\omega}{1+R^2C^2\omega^2}$$

$$\underline{Z}_{AB} = \frac{R}{1+R^2C^2\omega^2} + j\frac{\left(L\omega - R^2C\omega(1-LC\omega^2)\right)}{1+R^2C^2\omega^2}$$

Pour que $\underline{Z}_{AB} = R_{eq}$ il faut que la partie imaginaire de $\underline{Z}_{AB}$ soit nulle :

$$L\omega - R^2C\omega(1-LC\omega^2) = 0$$

$$L - R^2C + LR^2C^2\omega^2 = 0$$

$$\boxed{L = \frac{R^2C}{1+R^2C^2\omega^2}}$$

On a alors $R_{eq} = \frac{R}{1+R^2C^2\omega^2}$

$$R_{eq} = \frac{L}{R^2C}R \qquad \boxed{R_{eq} = \frac{L}{RC}}$$

2. Valeur de L.

$$L = \frac{(100)^2 \times \frac{100}{3}\cdot 10^{-6}}{1+\left(100\times\frac{100}{3}10^{-6}\times 400\right)^2} = 0,12\ H$$

3. Amplitude I_m

$$\underline{E}_m = \underline{Z}_{AB}\,\underline{I}_m = R_{eq}\,\underline{I}_m$$

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{E}_m}{R_e} = \frac{RC}{L}\underline{E}_m$$

$$\boxed{I_m = \frac{RC}{L}E_m \qquad I_m = 5,0\ A}$$

$$\varphi_i = \arg \underline{I}_m = \arg\left(\frac{RC}{L}\right) + \arg(\underline{E}_m) = 0 + 0$$

$$\boxed{\varphi_i = 0}$$

4. Amplitude de U_{mAD}.

$$\underline{U}_{mAD} = jL\omega\,\underline{I}_m = jL\omega\frac{RC}{L}\underline{E}_m$$

$$\underline{U}_{mAD} = jRC\omega\,\underline{E}_m$$

$$\boxed{U_{mAD} = RC\omega E_m \qquad U_{mAD} = 240\ V}$$

$$\underline{U}_{mDB} = \underline{Z}_{DB}\,\underline{I}_m = \frac{R}{1+jRC\omega}\underline{I}_m$$

$$\boxed{U_{mDB} = \frac{R}{(1+R^2C^2\omega^2)^{1/2}} I_m \qquad U_{mDB} = 300\ V}$$

Remarque importante :

La loi d'additivité des tensions (loi des mailles) est valable, en régime sinusoïdal, pour les tensions réelles ($e(t) = u_{AD}(t) + u_{DB}(t)$) ou en amplitudes complexes ($\underline{E}_m = \underline{U}_{mAD} + \underline{U}_{mDB}$).
Par contre, comme on peut le vérifier ici, la loi d'additivité des tensions ne s'applique pas pour les amplitudes réelles

$$E_m \neq U_{mAD} + U_{mDB}$$

Il en va de même pour la loi d'additivité des intensités (loi des noeuds). Pour cela voir question 5.

5. Amplitude des intensités i_R et i_C.

$$\underline{U}_{mDB} = \frac{1}{jC\omega}\underline{I}_{mC} \qquad \underline{I}_{mC} = jC\omega\,\underline{U}_{mDB}$$

$$\boxed{I_{mC} = C\omega U_{mDB} \qquad I_{mC} = 4,0\ A}$$

$$\underline{U}_{mDB} = R\,\underline{I}_{mR} \qquad \underline{I}_{mR} = \frac{\underline{U}_{mDB}}{R}$$

$$\boxed{I_{mR} = \frac{U_{mDB}}{R} = \frac{I_m}{(1+R^2C^2\omega^2)^{1/2}} \qquad I_{mR} = 3,0\ A}$$

6 - Phase à l'origine.

- $\varphi_R = \arg \underset{\sim}{I}_{mR} = \arg \underset{\sim}{U_m}_{DB} - \arg R = \arg \underset{\sim}{U_m}_{DB}$

$\varphi_R = \arg \dfrac{R\,\underset{\sim}{I_m}}{1+jRC\omega} = \arg R + \arg \underset{\sim}{I_m} - \arg(1+jRC\omega) = -\arg(1+jRC\omega)$

$\boxed{\varphi_R = -\arctan RC\omega \qquad \varphi_R = -0{,}93 \text{ rad} \quad (-53{,}1°)}$

- $\varphi_C = \arg \underset{\sim}{I}_{mC} = \arg(jC\omega\, \underset{\sim}{U_m}_{DB}) = \dfrac{\pi}{2} + \arg \underset{\sim}{U_m}_{DB}$

$\boxed{\varphi_C = \dfrac{\pi}{2} + \varphi_R = 0{,}64 \text{ rad} \quad (+39{,}9°)}$

Etude d'un oscillateur à l'aide de son portrait de phase.

1. Equation du mouvement

a. Dans le référentiel du laboratoire considéré galiléen, la relation fondamentale de la dynamique appliquée à l'oscillateur M donne en projection sur l'axe Ox :

$$m\ddot{x} = -k(x-\ell_0) - \lambda\dot{x} + F_c \;\Rightarrow\; \ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}\ell_0 + \frac{F_c}{m}$$

On peut donc mettre l'équation sous la forme donnée par l'énoncé avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, $Q = \sqrt{km}/\lambda$ et $X_0 = \ell_0 + F_c/k$.

b. Si la solution est pseudo-périodique, alors les solutions de l'équation caractéristique sont :

$$-\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}.$$

On peut définir alors la pseudo pulsation $\Omega = \omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}$ et le temps caractéristique de décroissance des oscillations $\tau = \dfrac{2Q}{\omega_0}$. L'expression de $x(t)$ est alors :

$$x(t) = A\exp(-t/\tau)\cos(\Omega t + \phi) + X_0$$

où A et ϕ sont des constantes dépendant des conditions initiales.

2. Etude du portrait de phase.

a. Le mobile oscille de part et d'autre de la position finale : il s'agit d'un mouvement pseudo périodique.

b. Au début du mouvement, le point représentatif de l'état du mobile est A et à la fin il s'agit du point B (on rappelle qu'un portrait de phase est décrit dans le sens horaire). Initialement le mobile est donc en $x = 0$ et sa vitesse est $v_0 = 2\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}$. A la fin M est immobile en $x = 2$ cm.

c. La vitesse maximale atteinte correspond au maximum de la courbe, soit $v = 16{,}5\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}$ et l'élongation maximale correspond à l'intersection avec l'axe des abscisses la plus à droite soit $x_{\max} \simeq 3{,}4$ cm.

d. Entre deux croisements avec l'axe des abscisses il se passe une demi pseudo-période. Pour avoir une valeur plus précise, on calcule les intervalles de temps entre chaque date donnée dans l'énoncé ce qui donne quatre valeurs de $T/2$ dont on fait la moyenne. Les quatre valeurs obtenues sont : 0,34 s ; 0,32 s ; 0,33 s et 0,32 s ; ce qui fait une moyenne de 0,3275 s soit en arrondissant on a $T = 0{,}65$ s et $\Omega = 2\pi/T = 9{,}6\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$.

e. En utilisant l'expression générale de $x(t)$ déterminée au début de l'exercice et sachant que $x_B = X_0$ (position finale atteinte lorsque $t \to \infty$, on a :

$$\delta = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{A\exp(-t/\tau)\cos(\Omega t+\phi)}{A\exp(-(t+nT)/\tau)\cos(\Omega(t+nT)+\phi)}\right) = \frac{1}{n}\ln\left(\exp(nT/\tau)\right) = \frac{T}{\tau}.$$

Sur la courbe, on choisit par exemple le premier croisement avec l'axe des abscisses ($x_1 = x_{\max} = 3{,}4$ cm) et le septième ($x_2 = 2{,}2$ cm). L'écart temporel entre les deux positions est $3T$ d'où :

$$\delta = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{3{,}4-2}{2{,}2-2}\right) = 0{,}65.$$

On en déduit donc $\tau = 1{,}0$ s.

f. On rappelle que $\Omega = \omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}$ et $\tau = \dfrac{2Q}{\omega_0}$. Le produit $\Omega\tau = \sqrt{4Q^2-1}$ permet de calculer Q soit $Q = \sqrt{\Omega^2\tau^2+1}/2$; l'application numérique donne $Q = 4{,}8$. On peut alors calculer $\omega_0 = \dfrac{\Omega}{\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}} = 9{,}65\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$.

g. La constante de raideur du ressort est $k = m\omega_0^2 = 18{,}6\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}$. Le coefficient de frottement est obtenu avec l'expression de Q : $\lambda = \sqrt{km}/Q = 0{,}40\ \mathrm{kg\cdot s^{-1}}$. Pour déterminer F_c, il faut utiliser $X_0 = \ell_0 + F_c/k$ qui correspond à la position de l'attracteur sur le portrait de phase soit $X_0 = 2{,}0$ cm. On en déduit $F_c = 0{,}19$ N.

Circuit à condensateur. Aspect énergétique.

1. Pour un temps infini, on obtient le régime permanent qui est ici continu. Par conséquent, les dérivées temporelles sont nulles soit $i = 0$.

2. En écrivant la loi des mailles avec $i = 0$, on a $u_C = E$.

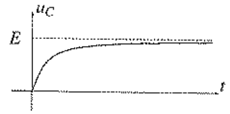
3. Dans ces conditions, la capacité C se comporte comme un interrupteur puisqu'il n'y a pas de courant.

4. En écrivant une loi des mailles ainsi que la relation $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$, on obtient $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_C}{RC} = \dfrac{E}{RC}$.

5. La quantité τ est homogène à un temps dit caractéristique donc τ s'exprime en secondes.

6. En résolvant l'équation différentielle avec la condition initiale $u_C = 0$, on obtient $u_C = E\left(1-\exp\left(-\dfrac{t}{RC}\right)\right)$ et $u_C = E$ pour un temps infini.

7. On a une asymptote $u = E$ et l'allure est la suivante :



8. L'équation de la tangente à l'originé s'écrit $u_C = \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t=0)t + u_C(0) = \dfrac{E}{RC}t$.

9. L'intersection avec l'asymptote $u_C = E$ s'obtient pour $t = \tau$.

10. Il faut résoudre l'équation $u_C(t) = 0{,}99E$. On obtient $t_1 = RC\ln 100$.

11. L'intensité s'obtient par la relation $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \dfrac{E}{R}\exp\left(-\dfrac{t}{RC}\right)$.

12. L'énergie emmagasinée dans C s'écrit $E_C = \displaystyle\int_0^{+\infty} u_C(t)i(t)\mathrm{d}t = \frac{CE^2}{2}$.

13. L'énergie dissipée par effet Joule est $E_J = \displaystyle\int_0^{+\infty} Ri^2(t)\mathrm{d}t = \frac{CE^2}{2}$.

14. L'énergie fournie par le générateur vaut $E_G = \displaystyle\int_0^{+\infty} Ei(t)\mathrm{d}t = CE^2$.

15. On constate que $E_G = E_C + E_J$, ce qui traduit la conservation de l'énergie.

16. On a $\rho = \dfrac{CE^2}{2CE^2} = 0{,}5$.

17. Par le même raisonnement que précédemment, on obtient $E_{G1} = \dfrac{CE^2}{4}$ et $E_{C1} = \dfrac{CE^2}{8}$.

18. Par la résolution de la même équation différentielle avec une nouvelle condition initiale $u_C = \dfrac{E}{2}$, on obtient $u_C = E\left(1 - \dfrac{\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)}{2}\right)$.

19. On en déduit l'intensité $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \dfrac{E}{2R}\exp\left(-\dfrac{t}{RC}\right)$.

20. Pour la seconde phase, on a $E_{G2} = \dfrac{CE^2}{2}$ et $E_{C2} = \dfrac{3CE^2}{8}$.

21. On en déduit $\rho' = 0{,}66$.

22. On pourrait faire tendre le rendement énergétique vers 1 en décomposant la charge en N charges de « pas » $\dfrac{E}{N}$.