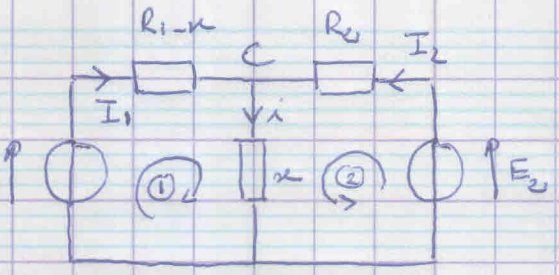
Comparaison de deux tensions -



1- Diviseur de tension -

On ne peut pas appliquer la relation du pont diviseur de tension pour déterminer l'expression de la tension aux bornes de x car le point C est un noeud de dérivation.
Le courant circulant dans x est différent de celui circulant dans R1 et R2.

2- Nombre inconnues

Le circuit présente 3 branches, il y a donc a priori trois inconnues d'intensité. Ces trois intensités ne sont pas indépendantes puisqu'elles sont reliées par une loi des noeuds $i = I_1 + I_2$.
Finalement il reste deux inconnues soit un système 2x2 à résoudre.

3- Système

On écrit deux lois de maille

① $E_1 - (R_1 - x) I_1 - x (I_1 + I_2) = 0$

② $E_2 - R_2 I_2 - x (I_1 + I_2) = 0$

$$\begin{cases} E_1 = R_1 I_1 + x I_2 & ① \\ E_2 = x I_1 + (R_2 + x) I_2 & ② \end{cases}$$

4- Résolution

$$① \rightarrow I_1 = \frac{E_1 - x I_2}{R_1}$$

$$①\rightarrow② \quad E_2 = \frac{x (E_1 - x I_2) + R_1 (R_2 + x) I_2}{R_1}$$

$$I_2 = \frac{R_1 E_2 - x E_1}{R_1 (R_2 + x) - x^2} \quad ③$$

(3) → (1) $I_1 = \dfrac{\dfrac{E_1 - x(R_1 E_2 - x E_1)}{R_1(R_2+x) - x^2}}{R_1}$

$$I_1 = \frac{E_1\left[R_1(R_2+x) - x^2\right] - x(R_1 E_2 - x E_1)}{R_1\left(R_1(R_2+x) - x^2\right)}$$

$$\boxed{I_1 = \frac{E_1(R_2+x) - x E_2}{R_1(R_2+x) - x^2}}$$

5 - Intensité i

$$i = I_1 + I_2 = \frac{E_1(R_2+x) - x E_2 + R_1 E_2 - x E_1}{R_1(R_2+x) - x^2}$$

$$\boxed{i = \frac{R_2 E_1 + (R_1 - x) E_2}{R_1(R_2+x) - x^2}}$$

6 - Rapport $\frac{E_1}{E_2}$.

La valeur de x est telle que $I_2 = 0$. On a donc :

$R_1 E_2 = x E_1$ soit :

$$\boxed{\frac{E_1}{E_2} = \frac{x}{R_1}}$$

7 - Comparaison.

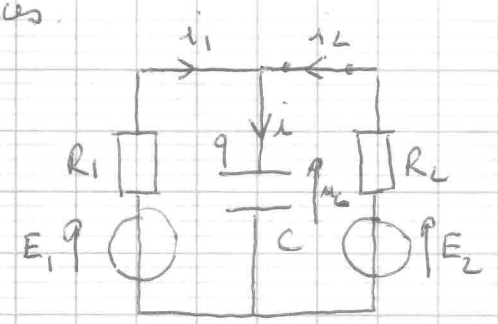
La connaissance de x et R_1 permet donc de comparer les deux tensions E_1 et E_2

8 - Utilisation

Il est possible d'effectuer cette comparaison si les tensions sont très différentes à condition de disposer de résistances de valeurs très différentes. Les gammes de valeurs de résistance seront un facteur limitant pour cette comparaison.

08,5

Etude d'un circuit RC avec deux sources.



1- Comportements

a- Pour $t<0$, K est ouvert

- on a donc $i_2=0$ et $i_1=i$.
- 0,25 Le condensateur est chargé
- 0,5 on a donc $i=i_1=0$ car le régime continu est établi. Le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.
- On a $E_1 = R_1 i_1 + u_c$ $\quad i_1=0 \Rightarrow u_c = E_1$

i	i_1	i_2	u_c
0	0	0	E_1

b- Pour $t=0^+$, K est fermé.

- 0,25 Comme la charge d'un condensateur est une fonction continue du temps on a :

$$u_c(0^+) = u_c(0^-) = E_1$$

- 0,5 La loi des mailles dans la première branche s'écrit :

$$E_1 - R_1 i_1(0^+) - u_c(0^+) = 0$$

Cela conduit à :

$$i_1(0^+) = 0$$

- 0,5 La loi des mailles dans la seconde branche s'écrit :

$$E_2 - R_2 i_2(0^+) - u_c(0^+) = E_2 - R_2 i_2(0^+) - E_1 = 0$$

Cela conduit à :

$$i_2(0^+) = \frac{E_2 - E_1}{R_2}$$

- 0,25 La loi des noeuds conduit à :

$$i(0^+) = i_1(0^+) + i_2(0^+)$$

$$i(0^+) = \frac{E_2 - E_1}{R_2}$$

i	i_1	i_2	u_c
$\frac{E_2-E_1}{R_2}$	0	$\frac{E_2-E_1}{R_2}$	E_1

c. $t \to \infty$, K fermé.

0,5 • Lorsque $t \to \infty$, le condensateur est à nouveau en régime permanent continu : il se comporte comme un interrupteur ouvert, d'où $i(\infty) = 0$ et $i_1(\infty) = -i_2(\infty)$.

0,5 • Pour déterminer $i_1(\infty)$ on utilise la loi de Pouillet

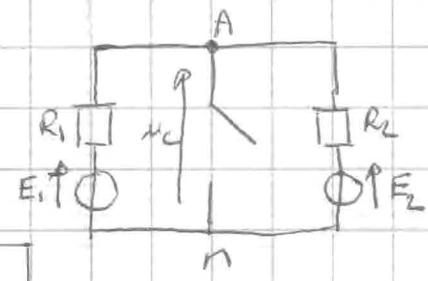
$$i_1(\infty) = -i_2(\infty) = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2}$$

• En prenant le potentiel du point N nul on a :

$$u_C = V_A$$

Pour déterminer V_A on utilise le théorème de Millman en A

$$V_A\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}$$

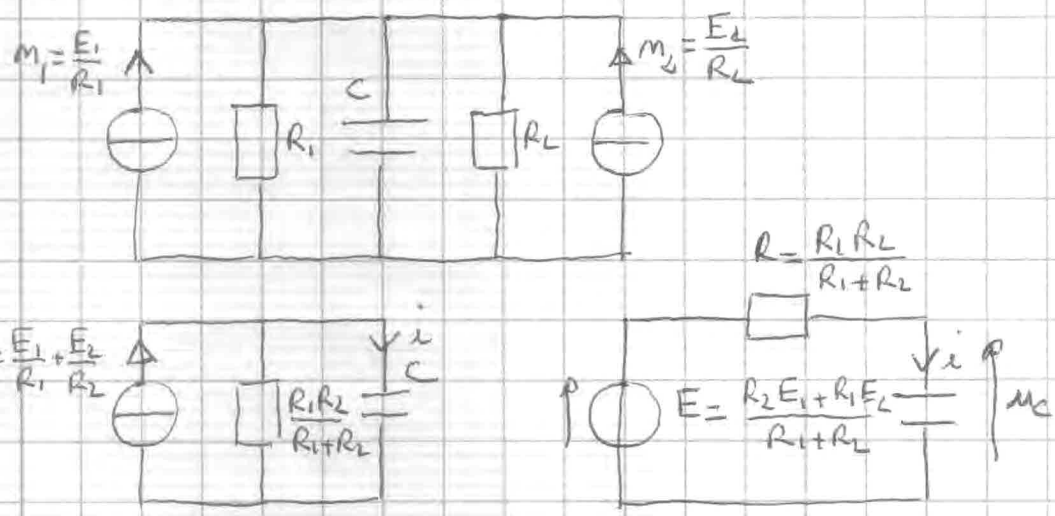


0,5 $$u_C = \frac{R_2 E_1 + R_1 E_2}{R_1 + R_2}$$

t	i_1	i_2	u_C
0	$\frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2}$	$\frac{E_2 - E_1}{R_1 + R_2}$	$\frac{R_2 E_1 + R_1 E_2}{R_1 + R_2}$

3. Equation différentielle.

On simplifie le circuit par une série de transformations générateur de Thévenin, générateur de Norton :



La loi des mailles dans le circuit équivalent final donne

$$E = R i + u_C \quad \text{or} \quad i = C \frac{du_C}{dt}$$

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C = \frac{E}{RC}$$

$$RC = \frac{R_1 R_2}{(R_1+R_2)} C = \tau \qquad E = \frac{R_2 E_1 + R_1 E_2}{R_1+R_2}$$

03 $$\boxed{\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{\tau} u_c = \frac{E}{\tau}}$$

3. Détermination de $u_c(t)$.

La solution est de la forme $u_c(t) = Ke^{-t/\tau} + E$

Pour déterminer K on utilise la continuité de la tension aux bornes du condensateur à la date $t=0$

$$u_c(0^+) = u_c(0^-)$$

$$K + E = E_1 \rightarrow K = E_1 - E = \frac{R_1(E_1-E_2)}{R_1+R_2}$$

01 $$\boxed{u_c(t) = \frac{R_1(E_1-E_2)}{R_1+R_2} e^{-t/\tau} + \frac{R_1E_2+R_2E_1}{R_1+R_2}}$$

4. Détermination de $i_1(t)$

La loi de maille pour la première branche donne :

$$i_1(t) = \frac{E_1 - u_c(t)}{R_1}$$

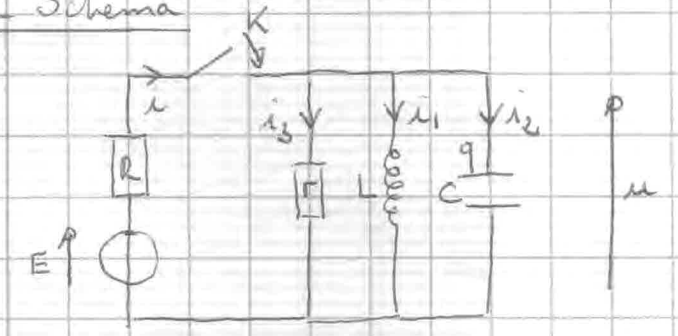
$$i_1(t) = \frac{E_1}{R_1} - \frac{(E_1-E_2)}{R_1+R_2} e^{-t/\tau} - \frac{1}{R_1} \frac{R_1E_2+R_2E_1}{(R_1+R_2)}$$

01 $$\boxed{i_1(t) = \frac{E_1-E_2}{R_1+R_2}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

12,5

Régime transitoire d'un circuit (R,L,C) parallèle.

1 - Schéma



0,5

2 - Grandeurs à $t = 0^+$

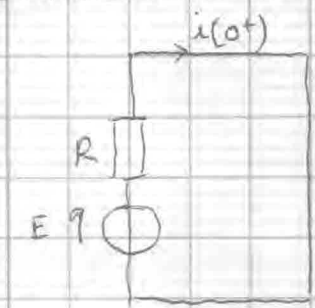
0,5 • Continuité de la tension aux bornes d'un condensateur, d'où :
$u(0^+) = 0$. Le condensateur se comporte comme un fil.

0,5 • Continuité de l'intensité dans une branche contenant une bobine
$i_1(0^+) = 0$. La bobine se comporte comme un interrupteur ouvert.

0,5 • Comme $u(0^+) = r\, i_3(0^+) = 0$ on a :
$i_3(0^+) = 0$

0,5 • La loi des nœuds permet alors d'écrire que
$i(0^+) = i_2(0^+)$.

0,5 • A $t = 0^+$ le montage est équivalent à :



La loi de Pouillet permet d'écrire que
$i(0^+) = \frac{E}{R} = i_2(0^+)$.

3 - Grandeurs en régime permanent.

• En régime permanent i_1 = cste or $u = L\frac{di_1}{dt} = 0$. La bobine
0,5 se comporte comme un interrupteur fermé.

• Comme $u = 0$ on a $i_3 = 0$

• Comme $u = 0$ on a $i_2 = C\frac{du}{dt} = 0$

• On a donc $i = i_1 = \frac{E}{R}$ car le schéma équivalent est le même que celui de la question précédente.

4- Equation différentielle vérifiée par i_3

Nous avons :

$$E = R i + r i_3 \quad (1) \qquad i = i_1 + i_2 + i_3 \quad (2)$$

$$r i_3 = L \frac{di_1}{dt} \rightarrow \frac{di_1}{dt} = \frac{r}{L} i_3 \quad (3)$$

$$r i_3 = \frac{q}{C} \rightarrow r \frac{di_3}{dt} = \frac{i_2}{C} \quad (4)$$

$(2) \rightarrow (1)$: $E = (R+r) i_3 + R i_1 + R i_2 \quad (1b)$

$(3) \rightarrow (1b)$: $E = (R+r) i_3 + R i_1 + R r C \frac{di_3}{dt} \quad (1c)$

On dérive par rapport au temps (1c)

$$0 = (R+r) \frac{di_3}{dt} + R \frac{di_1}{dt} + R r C \frac{d^2 i_3}{dt^2} \quad (1d)$$

$(3) \rightarrow (1d)$: $0 = (R+r) \frac{di_3}{dt} + \frac{Rr}{L} i_3 + R r C \frac{d^2 i_3}{dt^2}$

$$\boxed{\frac{d^2 i_3}{dt^2} + \frac{R+r}{RrC} \frac{di_3}{dt} + \frac{1}{LC} i_3 = 0}$$

0,25

5- Expression de Q et de ω_0.

On écrit l'équation différentielle sous la forme :

$$\frac{d^2 i_3}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di_3}{dt} + \omega_0^2 i_3 = 0$$

Par identification on obtient :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \qquad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{1}{Q} = \frac{R+r}{RrC}$$

0,25

$$Q = \frac{RrC}{\sqrt{LC}(R+r)}$$

$$\boxed{Q = \frac{Rr}{R+r} \sqrt{\frac{C}{L}}}$$

0,75

6- Régime pseudo-périodique.

Dans le cas d'un régime pseudo-périodique le discriminant de l'équation caractéristique $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$ est négatif

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 < 0$$

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2}(1 - 4Q^2) < 0 \Rightarrow \boxed{Q > \frac{1}{2}}$$

0,25

0,25 $\boxed{\frac{Rr}{R+r}\sqrt{\frac{C}{L}} < \frac{1}{2}}$ $\sqrt{\frac{C}{L}}$ homogène à l'inverse d'une résistance

7- Pseudo période - Pseudo pulsation.

0,25 $\boxed{\Omega = \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}}$ $\boxed{T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_0}\frac{2Q}{\sqrt{4Q^2-1}}}$

8- Expression de $i_3(t)$

La solution pour $i_3(t)$ est de la forme

0,25 $i_3(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t\right)$

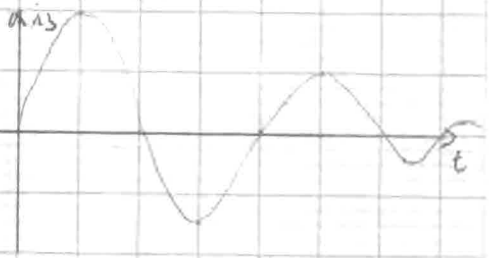
0,25 Comme $i_3(0^+) = 0$ on a $A = 0$

$$\frac{di_3}{dt} = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\left[-\frac{\omega_0}{2Q}B\sin\Omega t + B\Omega\cos\Omega t\right]$$

0,25 $\left(\frac{di_3}{dt}\right)_{t=0^+} = B\Omega$ Reste à déterminer $\left(\frac{di_3}{dt}\right)_{t=0^+}$

On reprend l'équation (4) de la question 4

$$\frac{di_3}{dt} = \frac{i_2}{rC} \rightarrow \left(\frac{di_3}{dt}\right)_{t=0^+} = \frac{i_2(0^+)}{rC} = \frac{E}{rRC} = B\Omega$$



01 On a ainsi $B = \frac{1}{\Omega}\frac{E}{rRC}$ d'où

$$\boxed{i_3(t) = \frac{1}{\Omega}\frac{E}{rRC}e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\sin\Omega t}$$

9- Régime permanent avec une précision de 1/1000

le régime est établi avec une précision de 1/1000 si l'amplitude de i_3 est inférieure au 1/1000 de sa valeur maximale soit $\frac{E}{1000\Omega rRC}$. On résout donc :

$$i_3 = \frac{E}{\Omega rRC}e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} < \frac{E}{1000\Omega rRC}$$

$$e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} < \frac{1}{1000}$$

01 $$\boxed{t > \frac{2Q}{\omega_0}\ln 1000}$$

10- Décrément logarithmique

$$\Lambda = \frac{1}{n} \ln \frac{i_3(t)}{i_3(t+T)} = \frac{1}{n} \ln \frac{e^{-\frac{\omega_0}{2Q} t} \sin \Omega t}{e^{-\frac{\omega_0}{2Q}(t+Tn)} \sin \Omega (t+T)} = \frac{1}{n} \ln e^{\frac{\omega_0 T n}{2Q}}$$

0,5 $$\boxed{\Lambda = \frac{\omega_0 T}{2Q}}$$

Si $Q \gg \frac{1}{2}$ on a un faible amortissement des oscillations.

Dans ce cas

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{2Q}{\sqrt{4Q^2-1}} \simeq \frac{2\pi}{\omega_0} \rightarrow \omega_0 T \simeq 2\pi$$

Ainsi

0,5 $$\boxed{\text{pour } Q \gg \frac{1}{2} \quad \Lambda \simeq \frac{\pi}{Q}}$$

A partir de l'expression de Λ on a :

$$\exp(n\Lambda) = \frac{i_3(t)}{i_3(t+nT)}$$

$$i_3(t+nT) = \frac{i_3(t)}{\exp(n\Lambda)}$$ Si l'on prend $n \simeq Q$ on a.

$$i_3(t+QT) = \frac{i_3(t)}{\exp(\pi)} \simeq 0{,}043\, i_3(t)$$

0,1 On peut donner l'interprétation suivante au facteur de qualité Q, il représente le nombre d'oscillations observables.

07

Lancement d'un oscillateur mécanique

1 - Equation différentielle

Dans le référentiel terrestre la masse m est soumise à

- son poids $\vec{P} = mg\vec{u}_x$
- tension du ressort $\vec{T} = -k(l-l_0)\vec{u}_x$
- force $\vec{F} = F_0\vec{u}_x$

La loi de Newton s'écrit:

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F} = m\vec{a}$$

En projection suivant $\vec{u}_x$

$$mg - k(l-l_0) + F_0 = m\ddot{x} \quad (1)$$

A l'équilibre:

$$mg - k(l_e - l_0) = 0 \quad (2)$$

(1) - (2) donne

$$-k(l-l_e) + F_0 = m\ddot{x} \quad \text{or } l - l_e = x$$

01,5

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}$$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}}$$

2 - Expression de $x(t)$

La solution est de la forme

0,5

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + \frac{F_0}{m\omega_0^2}$$

à $t = 0$ il y a continuité de la position et de la vitesse car la position intervient dans l'expression de l'énergie potentielle et la vitesse dans celle de l'énergie cinétique. Ces deux grandeurs ne peuvent subir de discontinuité temporelle car cela mettrait en jeu des puissances infinies -

$$x(0^+) = x(0^-)$$

$$A + \frac{F_0}{m\omega_0^2} = 0 \longrightarrow A = -\frac{F_0}{m\omega_0^2}$$

01

$$\dot{x}(t) = -A\omega_0\sin\omega_0 t + B\omega_0\cos\omega_0 t$$

$$\dot{x}(0^+) = \dot{x}(0^-)$$

$$B\omega_0 = 0 \longrightarrow B = 0$$

On obtient

$$\boxed{x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2}\left(1 - \cos\omega_0 t\right) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau.}$$

3. Expression de $x(t)$ pour $t > \tau$

Comme la force $\vec{F}$ devient nulle pour $t > \tau$. L'équation du mouvement de la masse est régi par l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

La solution est de la forme en prenant la variable $t' = t - \tau$

$$x(t') = A' \cos\omega_0 t' + B' \sin\omega_0 t'$$

A $t' = 0$ il y a continuité de la position et de la vitesse.

- $x(0^+) = x(0^-) = x(\tau)$

$$A' = \frac{F_0}{m\omega_0^2}\left(1 - \cos\omega_0\tau\right)$$

- $\dot{x}(t') = -A'\omega_0 \sin\omega_0 t' + B'\omega_0 \cos\omega_0 t'$

$$\dot{x}(0^+) = \dot{x}(0^-) = \dot{x}(\tau)$$

$$B'\omega_0 = +\frac{F_0}{m\omega_0}\sin\omega_0\tau \longrightarrow B' = \frac{F_0}{m\omega_0^2}\sin\omega_0\tau.$$

On obtient

$$x(t') = \frac{F_0}{m\omega_0^2}\left[\left(1 - \cos\omega_0\tau\right)\cos\omega_0 t' + \sin\omega_0\tau \sin\omega_0 t'\right]$$

0,5

$$x(t') = \frac{F_0}{m\omega_0^2}\left[\cos\omega_0 t' - \cos\left(\omega_0\left(t' + \tau\right)\right)\right]$$

$$x(t') = +\frac{2F_0}{m\omega_0^2}\sin\left(\frac{2\omega_0 t' + \omega_0\tau}{2}\right)\sin\frac{\omega_0\tau}{2}.$$

L'amplitude des oscillations s'écrit

$$\boxed{X_m = \frac{2F_0}{m\omega_0^2}\sin\frac{\omega_0\tau}{2}}$$

4. Condition sur τ

L'amplitude des oscillations est maximale si $\frac{\omega_0\tau}{2} = \frac{\pi}{2}$. Soit

0,5

$$\boxed{\tau = \frac{\pi}{\omega_0} = \frac{T_0}{2}}$$