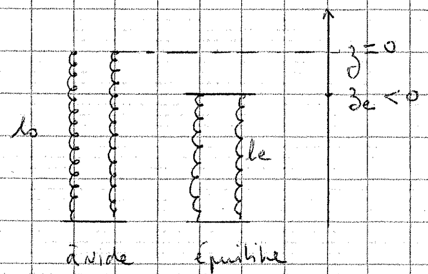
Oscillateur harmonique – Décollement d'une masse.

1) Ressort équivalent.

On étudie la masse m en équilibre dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
Elle est soumise à son
poids $\vec{P} = m\vec{g}$
à la tension des ressorts
$\vec{T} = -2k(l_e - l_0)\vec{u}_z$



La projection de la loi de Newton suivant $\vec{u}_z$ donne:

$-mg - 2k(l_e - l_0) = 0$ or $l_e - z_e = l_0 \longrightarrow z_e = l_e - l_0$

$-mg - 2kz_e = 0$

$$\boxed{z_e = -\frac{mg}{2k}}$$

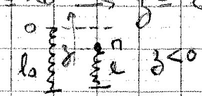
L'association en parallèle des deux ressorts de constante k est équivalente à un ressort unique de constante de raideur k' telle que:

$\boxed{k' = 2k}$ $\longrightarrow z_e = -\frac{mg}{k'}$

2.a – Équation différentielle vérifiée par z.

Lorsque la masse m est en mouvement la projection de la loi de Newton suivant $\vec{u}_z$ s'écrit:

$-mg - k'(l - l_0) = m\ddot{z}$ or $l - z = l_0 \longrightarrow z = l - l_0$



$-mg - k'z = m\ddot{z}$

$\boxed{\ddot{z} + \frac{k'}{m} z = -g}$ Équation d'un oscillateur harmonique

On pose $\omega_0^2 = \frac{k'}{m}$. On a alors $g = -\frac{k'}{m} z_e = -\omega_0^2 z_e$

$$\boxed{\ddot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_e}$$

2.b – Solution de l'équation différentielle

La solution de l'équation différentielle est de la forme:

$z(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + z_e$

A $t = 0$

$z(0) = A + z_e = z_e - a \Longrightarrow A = -a$

La vitesse s'écrit:

$\dot{z}(t) = -A\omega_0 \sin\omega_0 t + B\omega_0 \cos\omega_0 t$

$\dot{z}(0) = B\omega_0 = 0 \Longrightarrow B = 0$

On obtient:

$\boxed{z(t) = -a\cos\omega_0 t + z_e}$ Oscillations de la masse m autour de sa position d'équilibre z_e avec une amplitude de a.

2.c Période T_0.

La période T_0 des oscillations est telle que:

$z(t + T_0) = z(t)$

$-a\cos\omega_0(t + T_0) + z_e = -a\cos\omega_0 t + z_e$

Pour avoir cette égalité, la période T_0 doit vérifier la relation:

$\omega_0 T_0 = 2\pi \longrightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k'}}}$ T_0 ne dépend pas des conditions initiales. On parle d'isochronisme des oscillations.

3 – Action du plateau sur A.

Dans le référentiel terrestre, la masse A est soumise à:
- son poids $\vec{P} = m\vec{g}$
- à la réaction $\vec{R}$ du plateau.

Comme on suppose la masse A restant sur le plateau, elle a la même accélération que le plateau.
La loi de Newton s'écrit:

$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$ ce qui donne en projection:

$-mg + R_z = m\ddot{z}$

$R_z = m(\ddot{z} + g)$

Le contact entre A et le plateau ne subsiste que si $R_z > 0 \Rightarrow \ddot{z} > -g$
le point A quittera le plateau dès que $R_z = 0$.

Pour déterminer l'expression de $\ddot{z}$ on choisit maintenant le système (plateau + A) auquel on applique de nouveau la loi de Newton.

Ce système est soumis à :

- son poids $\vec{P}' = (M+m)\vec{g}$
- à la tension $\vec{T} = -k'(l - l_0)\vec{u_z} = k' z \vec{u_z}$ car $l_0 - l = -z$

On a :

$$(M+m)\vec{g} - k' z \vec{u_z} = (M+m)\vec{a}$$

$$-(M+m)g - k' z = (M+m)\ddot{z}$$

$$\ddot{z} = -g - \frac{k'}{M+m} z$$

On obtient ainsi l'expression de R_z demandée :

$$\boxed{R_z = -\frac{m}{M+m} k' z}$$

4. Condition sur z :

La masse A ne quittera jamais le plateau si, compte tenu des conditions initiales, la position $z = 0$ n'est jamais atteinte. ($R_z > 0$)

5. Expression de $z(t)$

Le système oscille autour de sa position d'équilibre $z_e' = -\frac{M+m}{k'} g$ avec une amplitude x

$$z(t) = -x \cos \omega_0' t + z_e' \quad \text{avec } \omega_0' = \sqrt{\frac{k'}{M+m}}$$

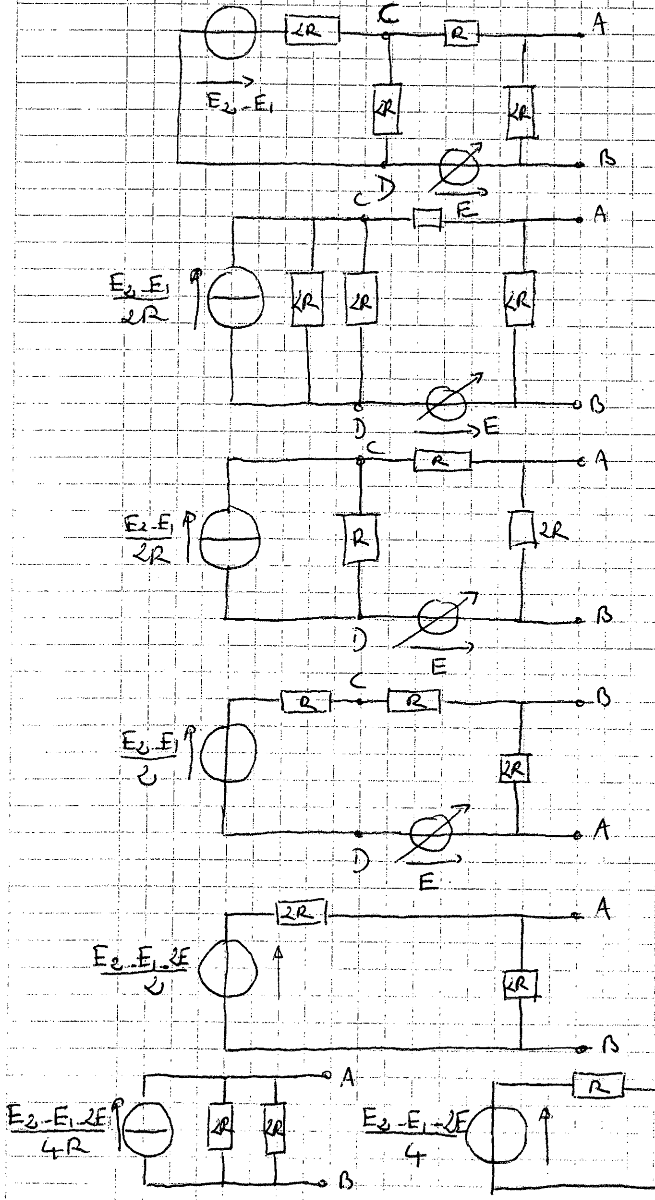
6. Condition sur x

A reste solidaire du plateau si la valeur maximale de $z(t)$, qui est $z_e' + x$ reste négative $x < -z_e'$ $\boxed{x < \frac{M+m}{k'} g}$

Circuit actif réductif à une résistance

1- Générateur de Thévenin équivalent

On procède à l'aide des dipôles équivalents et par associations successives.



Générateur équivalent

$E_{éq} = \frac{E_2 - E_1 - 2E}{4}$

$R_{éq} = R$

2- Expression de E

Le circuit entre les points A et B est équivalent à un circuit résistif si

$E_{éq} = 0$ soit pour

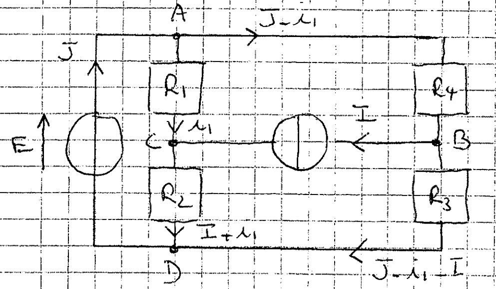
$E = \frac{1}{2}(-E_1 + E_2)$

Le circuit est équivalent donc à un conducteur ohmique de résistance R.

Intensité dans une branche

1 Schéma

L'application de la loi des noeuds permet de donner cette distribution de courants.



2 Détermination de J

Il y a six branches et quatre noeuds, il y a donc 3 inconnues. Cependant la présence du générateur de courant fait baisser d'une unité ce nombre. Pour résoudre l'exercice deux équations de maille sont nécessaires.

Maille (E, A, C, D, E)

$E - R_1 i_1 - (R_2)(I + i_1) = 0$ (1)

Maille (E, A, B, D, E)

$E - R_4(J - i_1) - R_3(J - i_1 - I) = 0$ (2)

(2) $\longrightarrow J = \frac{E + (R_3 + R_4) i_1 + R_3 I}{(R_3 + R_4)}$ (3)

(1) $\longrightarrow i_1 = \frac{E - R_2 I}{R_1 + R_2}$ (4)

(4) $\longrightarrow$ (3) $J = \frac{E + \frac{R_3 + R_4}{R_1 + R_2}(E - R_2 I) + R_3 I}{R_3 + R_4}$

$J = \frac{(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)E + (R_3(R_1 + R_2) - R_2(R_3 + R_4))}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}$

$\begin{cases} a = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 \\ b = (R_1 R_3 - R_2 R_4) \\ c = (R_1 + R_2)(R_3 + R_4) \end{cases}$

$\boxed{J = \frac{(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)E + (R_3 R_1 - R_2 R_4)I}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}}$