| NOM : | PCSI 16/17. DS 01 |
|---|---|

*Cette feuille est à remettre avec votre copie.*

## Exercice 1. Questions diverses.

5,5

### A. Trigonométrie.

Exprimer en fonction de $a$ et $b$ :

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$

$\sin a \sin b = -\frac{1}{2}\left[\cos(a+b) - \cos(a-b)\right]$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$

$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$

$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$

Donner les trois expressions possibles de :

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

Exprimer en fonction de $\frac{a}{2}$ :

$1+\cos a = 2\cos^2\frac{a}{2}$

$1-\cos a = 2\sin^2\frac{a}{2}$

$\sin a = 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}$

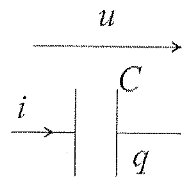
### B. Condensateur.

On considère un condensateur de capacité $C$ dont la tension à ses bornes est : $u(t) = Um\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$

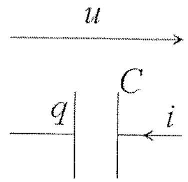
0,5

| Question | Vrai | Faux |
|---|---|---|
| La tension aux bornes d'un condensateur est en retard par rapport à l'intensité. | X | |
| L'intensité peut s'écrire sous la forme : $i(t) = I_m \cos\omega t$ | X | |
| En haute fréquence ce condensateur est assimilable à un interrupteur ouvert. | | X |
| L'intensité croit avec la fréquence. | X | |
| En régime permanent un condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert. | X | |

On considère un condensateur de capacité $C$. Pour les situations suivantes donner les expressions de $u$ et $i$ en fonction de $q$ et $C$.

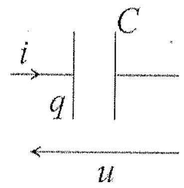



$\begin{cases} u = \frac{q}{C} \\ i = -\frac{dq}{dt} \end{cases}$

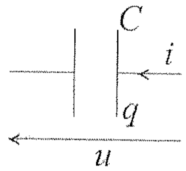



$\begin{cases} u = -\frac{q}{C} \\ i = -\frac{dq}{dt} \end{cases}$

ou




$\begin{cases} u = \frac{q}{C} \\ i = \frac{dq}{dt} \end{cases}$




$\begin{cases} u = -\frac{q}{C} \\ i = \frac{dq}{dt} \end{cases}$

### C. Bobine.

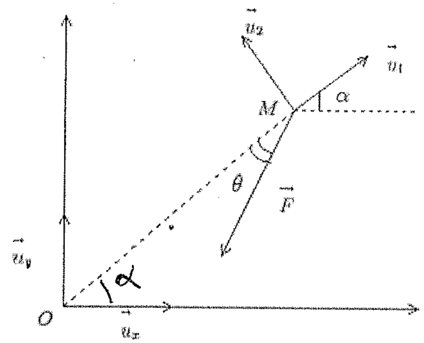
On considère une bobine d'inductance $L$ dont la tension à ses bornes est : $u(t) = Um\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$

0,5

| Question | Vrai | Faux |
|---|---|---|
| La tension aux bornes d'une bobine est en avance par rapport à l'intensité. | X | |
| L'intensité peut s'écrire sous la forme : $i(t) = I_m \cos\omega t$ | | X |
| En haute fréquence cette bobine est assimilable à un interrupteur ouvert. | X | |
| L'intensité croit avec la fréquence. | | X |
| En régime permanent une bobine se comporte comme un interrupteur ouvert. | | X |

### D. Projections de vecteurs.

On considère un référentiel $(R)$ de base $\left(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y\right)$ et une base mobile $\left(M, \vec{u}_1, \vec{u}_2\right)$ et un vecteur $\vec{F}$ de point d'application $M$.




Exprimer les vecteurs unitaires $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ dans la base $\left(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y\right)$ en fonction d'un ou des angles proposés dans le schéma :

$\vec{u}_1 = \cos\alpha\, \vec{u_x} + \sin\alpha\, \vec{u_y}$

$\vec{u}_2 = -\sin\alpha\, \vec{u_x} + \cos\alpha\, \vec{u_y}$ 01

Exprimer le vecteur $\vec{F}$ dans la base $\left(M, \vec{u}_1, \vec{u}_2\right)$ en fonction d'un ou des angles proposés dans le schéma :

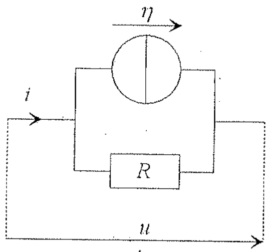
$\vec{F} = -F\cos\theta\, \vec{u_1} - F\sin\theta\, \vec{u_2}$ 01

Exprimer le vecteur $\vec{F}$ dans la base $\left(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y\right)$ en fonction d'un ou des angles proposés dans le schéma :

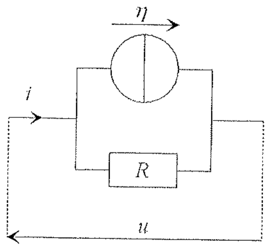
$\vec{F} = -F\cos(\alpha+\theta)\, \vec{u_x} - F\sin(\alpha+\theta)\, \vec{u_y}$ 01,5

**E. Tension aux bornes d'un générateur.**

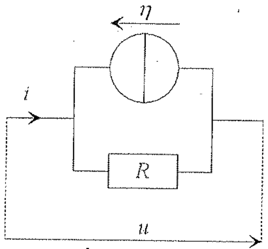
Compléter les expressions de $i$ (en fonction de $\eta, r, u$ ) et de $u$ (en fonction de $e, r, i$ ).



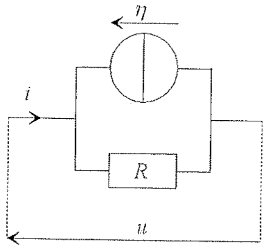

$i = \eta - \frac{u}{R}$



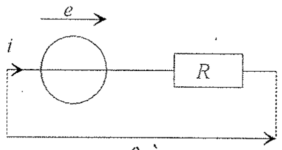

$i = \eta + \frac{u}{R}$ 6



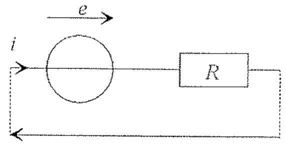

$i = -\left(\eta + \frac{u}{R}\right)$




$i = -\eta + \frac{u}{R}$

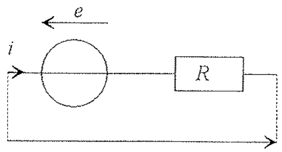



$u = e - Ri$

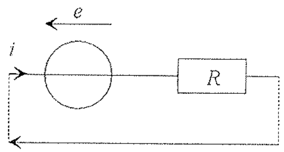



$u = -e + Ri$

2



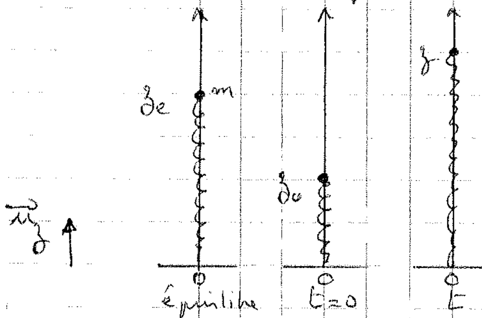

$u = -(e + Ri)$




$u = e + Ri$

DS1 2016/2017 Physique

Oscillateur harmonique




1) Position d'équilibre.

On étudie la masse m dans le référentiel $R_T$ supposé galiléen. Elle est soumise à :

- son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u_z}$
- La tension $\vec{T}$ du ressort : $\vec{T} = -k(l - l_0)\vec{u_z}$ ici $z = l$

A l'équilibre de la masse :

$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$

En projection suivant $\vec{u_z}$ :

$-mg - k(z_e - l_0) = 0$

$$\boxed{z_e = +l_0 - \frac{mg}{k} = l_0 - \frac{g}{\omega_0^2}}$$

Remarques :

$z_e > 0 \longrightarrow l_0 > \frac{g}{\omega_0^2}$

$z_e < l_0$

$z_0 < z_e < l_0$

2) Equation différentielle du mouvement.

A une date t quelconque la relation de Newton s'écrit :

$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$

En projection suivant $\vec{u_z}$ :

$-mg - k(z - l_0) = m\ddot{z}$

$\ddot{z} + \frac{k}{m} z = -g + \frac{k}{m} l_0$

$\ddot{z} + \omega_0^2 z = -g + \omega_0^2 l_0$ comme $\omega_0^2 z_e = \omega_0^2 l_0 - g$

$$\boxed{\ddot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_e}$$ équation d'un oscillateur harmonique

3) Solution

La solution de cette équation différentielle est de la forme

$z(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + z_{particulier}$

ici $z_{particulier} = z_e$

$z(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + z_e$

Pour déterminer les constantes A et B on utilise les conditions initiales :

- $z(t=0) = z_0 = A + z_e$ $\quad A = z_0 - z_e < 0$
- $\dot{z}(t) = -A\omega_0 \sin\omega_0 t + B\omega_0 \cos\omega_0 t$

$\dot{z}(t=0) = B\omega_0 = 0$ $\quad B = 0$

On obtient $\boxed{z(t) = (z_0 - z_e)\cos\omega_0 t + z_e}$

La cote prend les valeurs extrêmes $z_0$ et $2z_e - z_0$

Comme $2z_e > 2z_0 \longrightarrow 2z_e - z_0 > z_0$

4. Tension maximale.

L'expression de la tension $\vec{T}$ est :

$\vec{T} = -k(z - l_0)\vec{u_z}$ sa norme s'écrit :

$T = +k|z - l_0|$ $\quad$ Comme $2z_e - z_0 > z_0$

$T_{max} = k|z_0 - l_0| = k|l_0 - z_0|$ $\quad 2z_e - z_0 - l_0 > z_0 - l_0$

ou $T_{max} = k|2z_e - z_0 - l_0|$

$l_0 - z_0 > l_0 + z_0 - 2z_e$

D'autre part : $z_e < l_0 \longrightarrow l_0 - z_e > 0$ (1)

$z_e > z_0$ (2)

(1) - (2) $\quad l_0 - 2z_e > -z_0 \longrightarrow l_0 - 2z_e + z_0 > 0$

On a ainsi :

$l_0 - z_0 > l_0 + z_0 - 2z_e > 0 \Longrightarrow |l_0 - z_0| > |l_0 + z_0 - 2z_e|$

La tension maximale a pour expression $T_{max} = k|l_0 - z_0|$