Physique.
Devoir surveillé N°7. Corrigé.

Exercice 1. Rotation pour une masse soumise à un ressort.

1. Effectuons le bilan des forces :

► le poids du mobile $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$ qui reste perpendiculaire au plan de la trajectoire et qui ne travaille donc pas ;

► la réaction du support $\vec{R} = N\vec{u}_z + \vec{F}$, $\vec{F}$ est la composante tangentielle due au contact avec le support et modélise les frottements. L'utilisation de la table à coussin d'air a pour conséquence de rendre cette force nulle, $\vec{F} = \vec{0}$;

► la force élastique $\vec{T}$ exercée par le ressort sur le mobile, $\vec{T} = -k(r - \ell_0)\vec{u}$, où r est la longueur du ressort et $\vec{u}$ est unitaire le long du ressort et dirigé de O vers M : c'est une force centrale.

Pour les moments, nous avons d'une part
$$\vec{\mathscr{M}}^O_{\vec{P}/M} + \vec{\mathscr{M}}^O_{\vec{N}/M} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{N} = \overrightarrow{OM} \wedge (\vec{P} + \vec{N}) = \vec{0}\,;$$
et d'autre part, $\vec{\mathscr{M}}^O_{\vec{T}/M} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} = r\vec{u} \wedge T\vec{u} = \vec{0}$, résultat connu pour une force centrale. La somme des moments des forces en M étant nulle à chaque instant, le moment cinétique $\vec{\sigma}^O_M$ est bien une constante du mouvement .

2. a/ $\vec{\sigma}^O_M = \vec{\sigma}_O(M) = (x\vec{u}_x + y\vec{u}_y) \wedge m(\dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y) = m(x\dot{y} - y\dot{x})\vec{u}_z = mC\vec{u}_z$. Le moment cinétique étant constant durant tout le mouvement, sa valeur reste celle qu'il possède à l'instant initial, soit $m(x\dot{y}-y\dot{x})_{t=0} = \frac{6}{5}\ell_0\cdot 0 - 0 = 0$. À chaque instant, le moment cinétique est nul, $\vec{\sigma}^O_M = \vec{0}$. On peut également obtenir ce résultat en utilisant les coordonnées cylindro-polaires, on obtient alors $mr^2\dot{\theta} = 0 \Rightarrow \theta = \text{cte}$. On peut calculer cette constante en se plaçant à $t = 0$, le ressort étant le long de l'axe Ox, $\theta(t = 0) = 0$ et donc pour tout t on aura $\theta(t) = 0$. La trajectoire du mobile est une portion de la droite Ox .

Les vecteurs position $\overrightarrow{OM}$ et vitesse $\vec{v}_M$ restent constamment colinéaires, ce qui est une autre façon d'affirmer que le moment cinétique $\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}_M$ reste nul durant tout le mouvement. D'un point de vue plus qualitatif, on peut dire qu'initialement le ressort est le long de l'axe Ox, la force est également le long de cet axe et le ressort se mettant en mouvement sous l'action de cette seule force avec une vitesse initiale nulle, M se déplace le long de Ox.

b/ Pour déterminer la trajectoire, nous allons utiliser le principe fondamental de la dynamique dans un référentiel galiléen, $m\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} = -mg\vec{u}_z + N\vec{u}_z - k(\sqrt{x^2+y^2} - \ell_0)\frac{\overrightarrow{OM}}{\sqrt{x^2+y^2}}$. On sait déjà que lors du mouvement, $y = 0$, l'équation s'écrit alors
$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\vec{u}_x = -mg\vec{u}_z + N\vec{u}_z - k(x - \ell_0)\vec{u}_x,$$
c'est-à-dire $m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -k(x - \ell_0) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega_0^2(x - \ell_0) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = \omega_0^2\ell_0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. On reconnaît une équation différentielle du second ordre à coefficient constant avec un second membre constant. La solution générale de l'équation sans second membre est $x_g(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ et une solution particulière de l'équation est $x_p = \ell_0$ d'où la solution générale de l'équation $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + \ell_0$. On peut calculer la vitesse du mobile $\dot{x} = -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t)$ et, compte tenu des conditions initiales, $\dot{x}(t = 0) = 0 = B$, c'est-à-dire $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + \ell_0$, et comme $x(t = 0) = \frac{6}{5}\ell_0 = A + \ell_0$ on obtient $A = \frac{1}{5}\ell_0$, soit finalement $x(t) = \frac{1}{5}\ell_0\cos(\omega_0 t) + \ell_0$. La longueur ℓ du ressort est donc telle que $\ell \in [\frac{4}{5}\ell_0, \frac{6}{5}\ell_0]$.

3. a/ $\vec{\sigma}^O_M = m(x\dot{y} - y\dot{x})\vec{u}_z = mC\vec{u}_z$. Comme précédemment, le moment cinétique reste constant durant tout le mouvement et sa valeur est celle qu'il possède à l'instant initial, soit $m(x\dot{y} - y\dot{x})_{t=0} = m\ell_1^2\omega = mr^2\dot{\theta}$. En considérant que $\omega > 0$ on a donc $\sigma = \left\|\vec{\sigma}^O_M\right\| = m\ell_1^2\omega$.

b/ Le poids et la réaction du support sont deux forces qui restent perpendiculaires au mouvement durant le déplacement du mobile M, ainsi ces forces ne travaillent pas. La seule force qui travaille est la force élastique appliquée par le ressort et qui est conservative, l'énergie mécanique se conserve donc au cours du mouvement. $\mathcal{E}_\mathrm{m} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}(r - \ell_0)^2$.

c/ $\mathcal{E}_\mathrm{m} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{\ell_1^2\omega}{r^2}\right)^2 + \frac{1}{2}k(r-\ell_0)^2 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{\ell_1^4\omega^2}{r^2} + \frac{1}{2}k(r-\ell_0)^2$. On pose alors $\mathcal{E}_{\mathrm{p,ef}}(r) = \frac{1}{2}m\frac{\ell_1^4\omega^2}{r^2} + \frac{1}{2}k(r - \ell_0)^2 = \frac{\sigma^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}k(r - \ell_0)^2$.

d/ On a représenté sur la figure E.13.1 la courbe donnant $\mathcal{E}_{\mathrm{p,ef}}$ en fonction de $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et sachant que lors du mouvement nécessairement $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = \mathcal{E}_\mathrm{m} - \mathcal{E}_{\mathrm{p,ef}}(r) \geqslant 0$, on constate donc que la longueur du ressort varie entre r_m, sa longueur minimale et r_M, sa longueur maximale. Les valeurs de ces deux longueurs sont obtenues par les deux solutions de l'équation $\mathcal{E}_{\mathrm{p,ef}}(r) = \mathcal{E}_\mathrm{m}$.

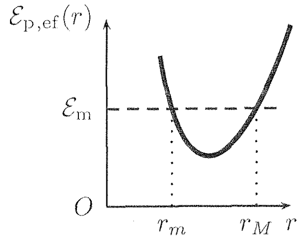

FIG. E.13.1. Énergie potentielle effective en fonction de r.

Exercice 2. Etude d'une machine tournante.

1. a/ La machine tourne autour d'un axe Δ et nous allons appliquer le théorème du moment cinétique scalaire par rapport à Δ. Les forces motrices forment un couple moteur dont le moment est Γ_0. Les pertes d'énergie résultent de frottements modélisés par un ensemble de forces de moment résultant $\mathscr{M}_\Delta = -k\omega$; ce moment est proportionnel à la vitesse du moteur, c'est un frottement de type fluide. Soit σ_Δ le moment cinétique de la machine tournante par rapport à l'axe de rotation, $\sigma_\Delta = J_\Delta\omega$, l'application du théorème du moment cinétique scalaire s'écrit $\boxed{J_\Delta \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \Gamma_0 - k\omega}$.

b/ L'équation différentielle étant linéaire, le régime permanent, c'est-à-dire après un temps de fonctionnement long (voir plus loin ce que l'on appelle long), sera une constante ω_0 ; dans cette phase on a donc $\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 0$, on en déduit que $\omega_0 = \frac{\Gamma_0}{k}$. L'équation différentielle s'écrit alors $\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{k}{J_\Delta}(\omega_0 - \omega)$. On pose $\tau = \frac{J_\Delta}{k}$, temps de relaxation, et on obtient $\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega_0 - \omega}{\tau}$. La solution d'une telle équation est la superposition de la solution de l'équation sans second membre, c'est-à-dire $Ae^{-\frac{t}{\tau}}$, et d'une solution particulière qui est ici $\omega = \omega_0$. Par conséquent, $\omega(t) = \omega_0 + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$. Compte tenu de la condition initiale $\omega(t=0) = 0$, on obtient $\omega = \omega_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$. Considérons l'écart relatif entre la vitesse angulaire à l'instant t et la vitesse limite atteinte en régime permanent, nous avons $\frac{\omega_0 - \omega(t)}{\omega_0} = e^{-\frac{t}{\tau}}$. Soit t_1 l'instant auquel cet écart est inférieur à 10^{-2}, $\ln\left(e^{-\frac{t}{\tau}}\right) < -2\ln(10) \Leftrightarrow t > t_1 = 4{,}6\tau$. On pourra donc dire ici que t est grand si la durée depuis le démarrage est supérieure à $4{,}6\tau$; la vitesse angulaire du moteur sera alors la vitesse limite, mieux qu'au centième près.

2. a/ Dans ce deuxième cas l'équation différentielle du mouvement possède un second membre dépendant du temps $J_\Delta \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \Gamma_0\left(1 + \eta\cos(\Omega t)\right) - k\omega$. On peut l'écrire sous la forme $\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega_0 - \omega}{\tau} + \frac{\omega_0}{\tau}\eta\cos(\Omega t)$. En utilisant la relation qui définit $\epsilon(t)$, l'équation devient

$$\frac{\mathrm{d}\epsilon(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\epsilon(t)}{\tau} + \frac{\eta}{\tau}\cos(\Omega t) \ .$$

b/ Cette équation différentielle linéaire fait apparaître un régime sinusoïdal forcé. La solution est donc la superposition de la solution générale sans second membre $Ae^{-\frac{t}{\tau}}$, qui caractérise un régime transitoire car son influence diminue exponentiellement, et d'un régime permanent représenté par une solution particulière de l'équation différentielle. On sait que dans le cas d'un système linéaire, c'est-à-dire régi par une équation différentielle linéaire, la réponse à une excitation sinusoïdale est sinusoïdale ; on recherche donc cette solution sous la forme $\epsilon(t) = a\cos(\Omega t - \psi)$. Afin de déterminer les deux inconnues a et ψ, nous allons utiliser la notation complexe. Avec cette notation l'excitateur s'écrit $\frac{\eta}{\tau}e^{i\Omega t}$ et nous allons poser $\underline{\epsilon} = ae^{-\psi}e^{i\Omega t}$; ainsi pour retrouver $\epsilon(t)$ il suffit de prendre la partie réelle de $\underline{\epsilon}$, c'est-à-dire que $\epsilon(t) = \mathfrak{Re}(\underline{\epsilon})$. L'équation différentielle devient donc $i\Omega ae^{-i\psi}e^{i\Omega t} = -\frac{ae^{-i\psi}e^{i\Omega t}}{\tau} + \frac{\eta}{\tau}e^{i\Omega t}$. On trouve ainsi $ae^{-i\psi} = \frac{\eta}{1+i\Omega\tau}$.

Le régime permanent s'écrit donc $\epsilon(t) = \frac{\eta}{\sqrt{1+\Omega^2\tau^2}}\cos(\Omega t - \psi)$, l'amplitude s'écrit donc $a = \frac{\eta}{\sqrt{1+\Omega^2\tau^2}}$, et la phase à l'origine $\psi = -\arctan(\Omega\tau)$ avec $\cos(\psi) > 0$.

3. Placer un anneau massif et de grand rayon, c'est augmenter de façon significative le moment d'inertie de la machine tournante. En effet, le moment d'inertie est proportionnel à la masse et le rayon intervient par son carré. Or $a = \frac{\eta}{1+\Omega^2\frac{J_\Delta^2}{k^2}}$. Si J_Δ augmente, l'amplitude a de la vibration diminue, d'où l'intérêt de rajouter un volant d'inertie.

Exercice 3. Particule dans un champ magnétique.

1. La particule n'est soumise qu'à la force magnétique $\vec{F}_{\text{ma}} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$, qui est orthogonale à la vitesse, et fournit donc une puissance nulle à la particule. La particule garde donc une énergie cinétique constante, ce qui implique que la norme de sa vitesse est constante.

2. La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la particule s'écrit

$$m\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = q\,\vec{v} \wedge \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m\ddot{x} = q\dot{y}B \\ m\ddot{y} = -q\dot{x}B \\ m\ddot{z} = 0\,. \end{cases} \tag{12.3}$$

L'équation sur $\ddot{z}$ montre que $\dot{z}$ est constante.

3. Les deux vecteurs $\vec{v}_\perp$ et $\vec{v}_{/\!/}$ sont orthogonaux et $\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_{/\!/}$. On élève cette relation au carré,

$$\underbrace{|\vec{v}|^2}_{=\text{cte}} = \underbrace{|\vec{v}_{/\!/}|^2}_{=\text{cte}} + |\vec{v}_\perp|^2 + \underbrace{2\,\vec{v}_{/\!/}\cdot\vec{v}_\perp}_{=0}\,. \tag{12.4}$$

On a déjà montré que les normes de $\vec{v}$ et de $\vec{v}_{/\!/}$ sont constantes. La relation (12.4) permet d'en déduire que $|\vec{v}_\perp|$ est constante. Ce résultat n'est valable que si le champ magnétique est uniforme.

4. On effectue la combinaison linéaire suggérée par l'énoncé avec les équations (12.3),

$$\begin{array}{rl|l} m\ddot{x} = & q\dot{y}B & \times 1 \\ m\ddot{y} = & -q\dot{x}B & \times \mathrm{i}\,. \end{array}$$

Cela donne

$$m\,\underbrace{(\ddot{x} + \mathrm{i}\,\ddot{y})}_{\ddot{u}} = qB(-\mathrm{i}\,\dot{x} + \dot{y}) = -qB\mathrm{i}\,\underbrace{(\dot{x} + \mathrm{i}\,\dot{y})}_{\dot{u}} \quad \Longleftrightarrow \quad \ddot{u} + \mathrm{i}\,\frac{qB}{m}\,\dot{u} = 0\,.$$

Il s'agit d'une équation différentielle du deuxième ordre en u à coefficients (complexes) constants. Cependant l'absence de terme en u permet de la ramener à une équation du premier ordre. En effet, en posant $s \overset{\text{déf.}}{=} \dot{u}$, l'équation devient

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \mathrm{i}\,\frac{qB}{m}\,s = 0\,.$$

Les deux termes de l'équation devant être de même dimension, le rapport $\frac{qB}{m}$ est homogène à l'inverse d'un temps ou à une pulsation, d'où la notation $\omega \overset{\text{déf.}}{=} \frac{qB}{m}$. Attention, ω peut être positif ou négatif, car les grandeurs q et B peuvent être de signe quelconque. Avec cette nouvelle notation, l'équation différentielle sur s se récrit simplement

$$\dot{s} + \mathrm{i}\,\omega\,s = 0\,.$$

Le fait que les coefficients soient complexes ne change rien à la méthode habituelle de résolution. Il suffit de travailler dans le corps des complexes. La solution est de la forme exponentielle

$$s(t) = A\,\exp(-\mathrm{i}\omega t) \quad \text{où } A \text{ est une constante scalaire complexe d'intégration.}$$

Cette constante A est complexe car on travaille dans le corps des complexes. On détermine A par les conditions initiales (12.14) données par l'énoncé. À $t = 0$, l'équation devient $s(0) = A$; or, $s(0) = \dot{u}(0) = \dot{x}(0) + \mathrm{i}\dot{y}(0) = \dot{x}_0$. Donc $A = \dot{x}_0$,

$$s(t) = \dot{x}_0 \, \exp(-\mathrm{i}\omega t) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \dot{u}(t) = \dot{x}_0 \, \exp(-\mathrm{i}\omega t)\,.$$

Pour trouver u, on intègre encore une fois par rapport au temps sans oublier la constante (complexe) d'intégration, notée C,

$$u(t) = \frac{\dot{x}_0}{-\mathrm{i}\omega} \, \exp(-\mathrm{i}\omega t) + C\,.$$

Les complexes ont achevé leur rôle simplificateur de la résolution. On peut maintenant revenir en notation réelle, en notant $C = a + ib$ (a et b étant réels),

$$x(t) + \mathrm{i}\,y(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin(\omega t) + \mathrm{i}\,\frac{\dot{x}_0}{\omega}\cos(\omega t) + a + \mathrm{i}\,b\,.$$

En identifiant les parties réelle et imaginaire dans cette équation, on obtient

$$\begin{cases} x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin(\omega t) + a \\ y(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega}\cos(\omega t) + b\,. \end{cases}$$

On utilise une dernière fois les conditions initiales (12.14) pour déterminer les constantes réelles a et b. À $t = 0$, x et y sont nuls, donc $a = 0$ et $b = -\frac{\dot{x}_0}{\omega}$. Finalement,

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin(\omega t) \\ y(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega}\cos(\omega t) - \frac{\dot{x}_0}{\omega} \end{cases}}\,.$$

5. Si on ne reconnaît pas les équations obtenues à la question précédente, on peut visualiser le tracé de la courbe paramétrée correspondante avec un logiciel ou une calculatrice, en donnant à $\dot{x}_0$ et ω des valeurs arbitraires (sans signification), comme 1 par exemple. Le tracé est un cercle.

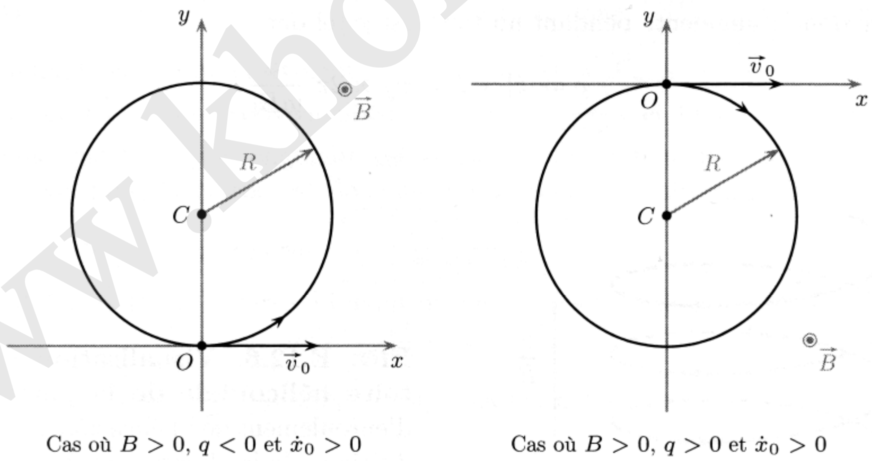

FIG. E.12.5. Visualisation de la trajectoire circulaire de la particule dans le plan $(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y)$. Le sens de parcours du cercle dépend du signe de B, du signe de la charge q et de la vitesse initiale de la particule.

Plus formellement, on reconnaît les équations paramétriques d'un cercle dont les caractéristiques sont (voir figure E.12.5)

$$\boxed{\text{centre } \left(0, -\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right) \text{ et rayon } \left|\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right| \quad \text{où} \quad \omega = \frac{q\,B}{m}}\,.$$

La valeur absolue est importante dans le rayon, car $\dot{x}_0$ et ω peuvent être de signe quelconque. Le sens de parcours de ce cercle dépend du signe de ω, c'est-à-dire du signe de $q \times B$. Pour le déterminer, il suffit de faire un dessin dans le plan $(0,\vec{u}_x,\vec{u}_y)$ sur lequel on place le centre du cercle (dont la position dépend du signe de ω et de celui de $\dot{x}_0$). Le vecteur vitesse initial $(\dot{x}_0,0)$ donne alors immédiatement le sens de parcours du cercle. On doit tester le dessin en trouvant le sens de la force magnétique de Lorentz $q\,\vec{v} \wedge \vec{B}$ avec la règle des trois doigts de la main droite. Cette force doit être orientée vers l'intérieur de la trajectoire.
La pulsation temporelle de parcours du cercle est $|\omega| = \left|\frac{qB}{m}\right|$. La valeur absolue est importante, car $\omega = \frac{qB}{m}$ peut être négative alors qu'une pulsation temporelle est toujours définie positivement. La période de révolution est

$$T = \frac{2\pi}{|\omega|} = \frac{2\pi\, m}{|qB|}\,.$$

Plus la particule est massive (m grand), plus le temps de parcours est grand. En revanche, plus le produit $|qB|$ est grand, c'est-à-dire plus la force magnétique est grande, plus le temps de parcours du cercle est réduit. En effet, la norme $|\dot{x}_0|$ de la vitesse est fixée par les conditions initiales et le rayon du cercle est $R = \frac{|\dot{x}_0|m}{|qB|}$, d'autant plus petit que $|qB|$ est grand.
6. On résume les résultats précédents. Les vitesses $\vec{v}_{/\!/}$ et $\vec{v}_\perp$, respectivement parallèle et orthogonale au champ magnétique uniforme :

- sont indépendantes l'une de l'autre ;
- ont des normes constantes.

La trajectoire de la particule est la composition :

- d'une translation rectiligne uniforme parallèlement au champ à la vitesse $\vec{v}_{/\!/}$;
- d'une rotation circulaire uniforme de rayon $R = \frac{mv_\perp}{|qB|}$ dans le plan orthogonal au champ.

La trajectoire est donc une **hélice** (voir figure E.12.6) de rayon

$$R = \frac{mv_\perp}{|qB|}\,,$$

inscrite sur un cylindre dont l'axe est le champ magnétique. Le **pas de l'hélice**, défini comme la distance dont z augmente pendant un tour, est p tel que

$$p = |\dot{z}| \times T = v_{/\!/} \times 2\pi\,\frac{m}{|qB|}\,.$$

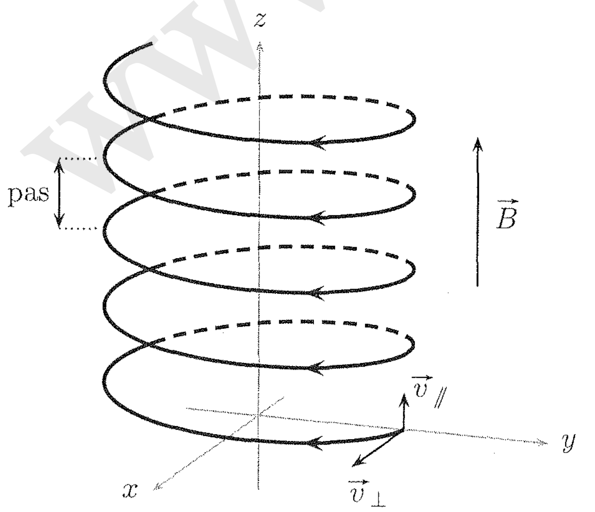

Fig. E.12.6. Visualisation de la trajectoire hélicoïdale de la particule. Le sens d'enroulement de l'hélice dépend du signe de B, du signe de la charge q et de la vitesse initiale de la particule.

De façon intuitive, plus la composante $\vec{v}_{/\!/}$ de la vitesse parallèle au champ est grande, plus le pas de l'hélice est grand, c'est-à-dire plus l'hélice est distendue. Au contraire, plus $\vec{v}_{/\!/}$ est petite, plus l'hélice est tassée. À l'extrême, si $\vec{v}_{/\!/}$ est nulle, l'hélice se réduit à une trajectoire circulaire. C'est surtout ce cas qui est important dans les applications pratiques.