

## Formule de Duperray.

### 1. Isothermes dans le diagramme $(p, v)$ .

Le volume massique de l'eau liquide n'est fonction ni de la pression (liquide incompressible) ni de la température (liquide indilatable), les isothermes sont donc toutes des verticales d'équation :

$$v_L = 1,0 \text{ dm}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$$

Pour la vapeur d'eau, on adopte le modèle du gaz parfait. On a alors :

$$pV = nRT = \frac{m}{M}RT$$

$$p \frac{V}{m} = pv_V = \frac{RT}{M} \text{ avec } v_V = \frac{V}{m} \text{ volume massique de la vapeur}$$

$$v_V = \frac{RT}{pM}$$

On peut calculer, en se plaçant à la pression de vapeur saturante  $p_s \theta$  :

$$v_V \text{ } 150^\circ\text{C} = 386 \text{ dm}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \text{ avec } p_s \text{ } 150^\circ\text{C} = 5,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$v_V \text{ } 200^\circ\text{C} = 136 \text{ dm}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \text{ avec } p_s \text{ } 200^\circ\text{C} = 16 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

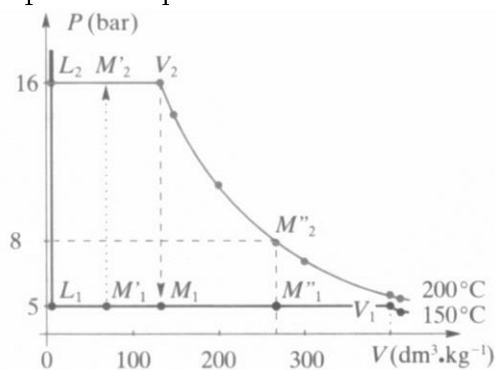
Les équations des isothermes de la vapeur sèche, données par la loi des gaz parfaits sont :

$$p = \frac{RT}{Mv_V} = \frac{8,314 \cdot \theta^\circ\text{C} + 273}{18 \cdot 10^{-3} \cdot v_V} \quad p \text{ en Pa si } v_V \text{ en m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$p = \frac{1,95 \cdot 10^5}{v_V} \text{ à } 150^\circ\text{C}$$

$$p = \frac{2,18 \cdot 10^5}{v_V} \text{ à } 200^\circ\text{C}$$

Enfin, les isothermes sont aussi des isobares lorsque les deux phases sont en équilibre. On obtient ainsi les courbes suivantes, sur lesquelles on peut suivre les évolutions.



### 2. Titre massique en vapeur à $150^\circ\text{C}$ .

Soit  $M_1$  le point correspondant à l'état décrit.

On applique le théorème des moments :

$$x_{1V} = \frac{v - v_{1L}}{v_{1V} - v_{1L}} = \frac{v - v_L}{v_{1V} - v_L} = \frac{M_1 L_1}{V_1 L_1} = \frac{136 - 1}{386 - 1} = 0,35$$

### 3. Chauffage isochore.

On part du point  $M_1'$  de titre massique en vapeur  $x_{1V}' = \frac{x_{1V}}{2}$ .

Le théorème des moments permet de situer ce point sur l'isotherme 150°C :

$$x_{1V}' = \frac{M_1' L_1}{V_1 L_1} = \frac{x_{1V}}{2} = \frac{1}{2} \frac{M_1 L_1}{V_1 L_1}$$
$$L_1 M_1' = \frac{1}{2} L_1 M_1 = \frac{135}{2} = 67,5 \text{ dm}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$$

L'évolution isochore aboutit au point  $M_2'$  pour lequel :

$$x_{2V} = \frac{L_2 M_2'}{L_2 V_2} = \frac{67,5}{135} = 0,5$$

### 4. Température de rupture de l'équilibre.

On part du point  $M_1''$  de titre massique en vapeur  $x_{1V}'' = 2x_{1V}$ .

Le théorème des moments permet de situer ce point sur l'isotherme 150°C :

$$x_{1V}'' = \frac{M_1'' L_1}{V_1 L_1} = 2x_{1V} = \frac{M_1 L_1}{V_1 L_1}$$
$$L_1 M_1'' = 2L_1 M_1 = 2 \times 135 = 270 \text{ dm}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$$

L'isochore s'arrête à 200°C au point  $M_2''$  pour lequel le système est monophasé.

La pression lue sur le graphe est de l'ordre de 8,0 bar.

En utilisant la loi des gaz parfaits :

$$p = \frac{RT}{Mv_V} = \frac{8,314 \times 200 + 273}{18 \cdot 10^{-3} \times 0,270} = 8,1 \cdot 10^5 \text{ Pa soit } 8,1 \text{ bar}$$

Ces deux résultats sont cohérents entre eux.

L'équilibre liquide vapeur est alors rompu pour une température  $\theta_3$  qui vérifie à la fois la relation de Duperray :

$$p_s \theta_3 = p_o \left( \frac{\theta_3}{100} \right)^4$$

Et la loi des gaz parfaits :

$$p = \frac{RT}{Mv_V} = \frac{8,314 \cdot \theta_3 + 273}{18 \cdot 10^{-3} \cdot v_V} \text{ avec } v_V = 270 \text{ dm}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$$

On égale ces deux expressions :

$$p_o \left( \frac{\theta_3}{100} \right)^4 = \frac{R \theta_3 + 273}{Mv_V}$$

$\theta_3$  est bien solution d'une équation du quatrième degré.

En utilisant une calculatrice, on trouve  $\theta_3 = 167^\circ\text{C}$