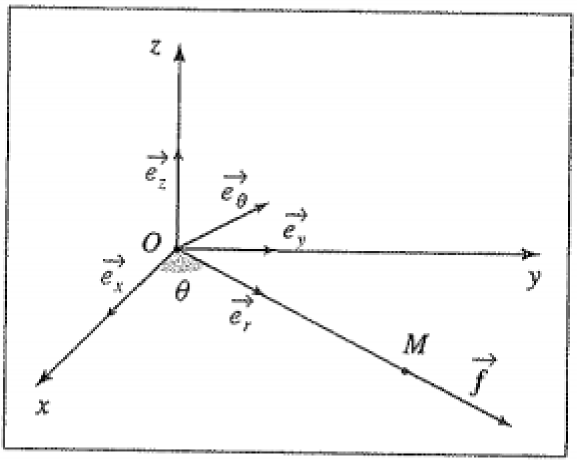
Mouvement à force centrale. Satellite.

Partie 1.

On considère dans un référentiel galiléen une particule P de masse m, soumise à une force centrale $\vec{f} = f_r(r)\vec{e}_r$ et décrivant un mouvement contenu dans le plan $(Ox,\ Oy)$.



1. En posant $u = 1/r$ et à l'aide de la constante de la loi des aires $C = r^2\dot{\theta}$ démontrer que la vitesse $\vec{v}$ et l'accélération $\vec{a}$ peuvent s'exprimer à l'aide de u et des dérivées de u par rapport à θ sous la forme suivante :
$\vec{v} = C\left(-\dfrac{du}{d\theta}\vec{e}_r + u\vec{e}_\theta\right)$; $\vec{a} = -C^2u^2\left(\dfrac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)\vec{e}_r$ Formules de Binet
2. En appliquant la seconde loi de Newton, déterminer la loi de force $f_r(r)$ pour que la trajectoire de la particule soit une spirale logarithmique $r = a\exp\theta$. On précisera la constante de la loi des aires à partir des conditions initiales r_o et θ_o.
3. A $t = 0$, la particule P est lancée en $P_o\left(\vec{r_o} = \overrightarrow{OP}_o, \theta_o = 0\right)$ avec une vitesse $\vec{v}_o$ orthogonale à $\vec{r}_o$. Déterminer sa trajectoire sachant qu'elle se trouve dans un champ de forces centrales attractives : $\vec{f} = -\dfrac{k}{r^3}\vec{e}_r$. Discuter suivant les valeurs de $v_o = \left\|\vec{v}_o\right\|$ la nature des trajectoires possibles.
4. On considère maintenant que dans un référentiel galiléen la particule P de masse m est soumise à une force centrale $\vec{f} = -\dfrac{k}{r^2}\vec{e}_r$ et décrivant un mouvement contenu dans le plan $(Ox,\ Oy)$. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique à la masse m, déterminer une équation une équation différentielle du second ordre en u par rapport à θ.
Montrer que la résolution de cette équation différentielle conduit à exprimer la distance r sous la forme : $r = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta}$. Déterminer les expressions de p et e en fonction de C et de m.

Partie 2.

Le satellite Hipparcos devait être placé sur une orbite géostationnaire à une altitude $H = 36\ 000$ km. Un problème de mise à feu du moteur d'apogée a laissé Hipparcos sur son orbite de transfert, son altitude variant entre $h = 500$ km et H.

Au cours d'une révolution, il passe dans la ceinture de Van Hallen. On supposera que cette ceinture est comprise entre deux sphères de rayon $r_1 = 8\ 400$ km, $r_2 = 28\ 000$ km et de centre celui de la

Terre. La ceinture de Van Hallen est constituée de particules chargées piégées dans le champ magnétique terrestre qui « aveuglent » les détecteurs d'Hipparcos interrompant ainsi les mesures des positions des étoiles objets de la mission.
On assimile la Terre à une sphère de centre O, de rayon $R = 6\,400$ km et de masse M et le satellite à un point matériel (S, m). On suppose le référentiel géocentrique (Rgc) galiléen. La période de rotation de la Terre dans ce référentiel appelée jour sidéral vaut $T = 86\,164$ s. On note G la constante de gravitation, sa valeur numérique n'est pas utile dans ce problème.

1. Exprimer la force qui s'exerce sur S.
   Montrer que le moment cinétique $\vec{L}$ en O du satellite est une constante du mouvement.
   En déduire que le mouvement du satellite est plan.
2. On pose que le mouvement s'effectue dans le plan perpendiculaire à l'axe Oz et on utilise les coordonnées cylindriques $(O,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$. Exprimer la quantité $r^2\dot{\theta}$ en fonction de L_z et m.
   Quelle est le nom de cette grandeur ?
3. Montrer que le vecteur excentricité $\vec{e} = \vec{u}_\theta - \dfrac{L_z}{GMm}\vec{v}$ est une constante du mouvement ($\vec{v}$ étant la vitesse du satellite).
4. On choisit l'origine de l'angle polaire pour avoir $\theta = \left(\vec{e},\vec{u}_\theta\right)$. Montrer que l'équation de la trajectoire peut se mettre sous la forme $r(\theta) = \dfrac{p}{1-e\cos\theta}$ où e est la norme de $\vec{e}$.
   En déduire la trajectoire du satellite.
5. Exprimer et calculer e et p en fonction de h, H et R.
6. Exprimer et calculer le demi-grand axe a de la trajectoire.
7. Enoncer sans démonstration la troisième loi de Kepler.
8. Exprimer la période Th de révolution d'Hipparcos en fonction de T, R, H et h.
   Calculer Th en heure.
9. Déterminer les valeurs numériques des angles θ_1, θ_2 d'entrée et de sortie de la ceinture de Van Hallen du satellite. On donnera les valeurs comprises entre 0 et 180°.
10. Représenter sur un schéma clair la trajectoire du satellite et l'aire A balayée par $\overrightarrow{OS}$ lors d'un passage dans la ceinture de Van Hallen et correspondant à la période d'inactivité de S.

Pour la question suivante, on prendra une valeur approchée de $A = 200.10^6$ km^2.

11. Déterminer le rapport $\rho = \dfrac{t_O}{Th}$ en fonction de A et A_e (aire de l'ellipse) où t_o est la durée totale d'inactivité d'Hipparcos sur une période. Application numérique.
    On donne l'aire de l'ellipse : $A_e = \dfrac{\pi p^2}{\left(1-e^2\right)^{3/2}}$