

Mouvement à force centrale. Satellite.

Partie 1.

1) Rappelons l'expression de la vitesse en coordonnées polaires :

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta.$$

Le mouvement étant à force centrale, on dispose de l'intégrale première des aires : $r^2\dot{\theta} = C$.

D'où $\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -C \frac{du}{d\theta}$ et $r\dot{\theta} = \frac{C}{r} = Cu$, qui conduisent à la première formule de Binet : $\vec{v} = C \left(-\frac{du}{d\theta} \vec{e}_r + u \vec{e}_\theta \right)$.

Considérons maintenant l'expression de l'accélération en coordonnées polaires :

$$\vec{a} = [\ddot{r} - r\dot{\theta}^2] \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \vec{e}_\theta.$$

La composante orthogonale est nulle dans le cas d'un mouvement à force centrale. Examinons la composante radiale.

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{d\theta} = \frac{d\dot{r}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -C \frac{d^2u}{d\theta^2} \frac{C}{r^2} = -C^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2}$$

d'où la seconde formule de Binet : $\ddot{r} = -C^2 u^2 \left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u \right) \vec{e}_r$.

2) Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la particule s'écrit :

$$f = -mC^2 u^2 \left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u \right), \text{ avec } u = \frac{1}{a} e^{-\theta}$$

d'où immédiatement $f = -mC^2 u^2 [u + u]$, soit $f(r) = -\frac{2mC^2}{r^3}$.

• La loi de force est donc de la forme : $f(r) = -\frac{k}{r^3}$.

• La valeur de C est déterminée par les conditions initiales, donc $k = 2mr_0^4\dot{\theta}_0^2$.

3) On applique à la particule M la relation fondamentale de la dynamique :

$$-mC^2 u^2 \left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u \right) = -ku^3, \text{ d'où } \frac{d^2u}{d\theta^2} + \left(1 - \frac{k}{mC^2} \right) u = 0, \text{ avec } C = r_0 v_0.$$

Pour la suite du problème, l'axe polaire sera pris colinéaire et de même sens que $\overrightarrow{OM_0}$, ce qui signifie que $\dot{\theta}(0) = 0$.

$$1^{\text{er}} \text{ cas : } \frac{k}{mC^2} = 1, \text{ d'où } v_0 = \frac{1}{r_0} \sqrt{\frac{k}{m}} = v_c.$$

L'équation différentielle du mouvement s'écrit alors $\frac{d^2u}{d\theta^2} = 0$, ce qui s'intègre en $u = A\theta + B$, avec A et B déterminés par les conditions initiales :

$$u(0) = \frac{1}{r_0} \quad \text{et} \quad \left(\frac{du}{d\theta} \right)_{\theta=0} = -\frac{1}{C} \dot{r}(0) = 0,$$

d'où $r = r_0$, ce qui est l'équation d'un cercle centré sur le centre de forces.

$$2^{\text{e}} \text{ cas : } \frac{k}{mC^2} < 1, \text{ d'où } v_0 > \frac{1}{r_0} \sqrt{\frac{k}{m}} = v_c.$$

Posons $p = \sqrt{1 - \frac{k}{mC^2}}$; il vient $\frac{d^2u}{d\theta^2} + pu = 0$. Avec les mêmes conditions initiales, l'équation différentielle du mouvement s'intègre en $u = u(0) \cos(p\theta)$, d'où : $r = \frac{r_0}{\cos(p\theta)}$. La trajectoire admet une asymptote

$$\text{d'équation } \theta = \frac{\pi}{2p}.$$

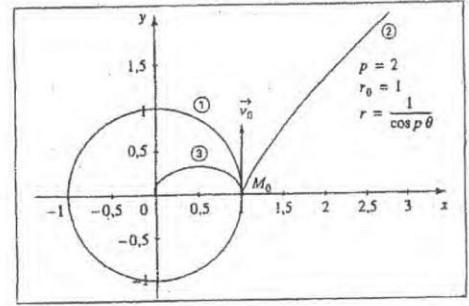
$$3^{\text{e}} \text{ cas : } \frac{k}{mC^2} > 1, \text{ d'où } v_0 = \frac{1}{r_0} \sqrt{\frac{k}{m}} < v_c.$$

En posant $p = \sqrt{\frac{k}{mC^2} - 1}$, l'équation du mouvement s'écrit : $\frac{d^2u}{d\theta^2} = pu$.

$$\text{Sa solution est } u = u(0) \operatorname{ch}(p\theta), \text{ d'où : } r = \frac{r_0}{\operatorname{ch}(p\theta)}.$$

La trajectoire admet le centre de forces comme point asymptote.

Le schéma ci-dessous illustre la discussion précédente.



Satellite Hippocrate

1. Noyau d'inertie

On étudie le système (S, m) dans le référentiel géocentrique R_G suppose galiléen. S entraîne à la face de précitation $\vec{F} = -Gm\vec{r}$. Le moment cinétique \vec{L} s'exprime par

$$\vec{L}_0 = \vec{OS} \wedge \vec{r}, \quad \text{avec } \vec{OS} = \vec{r}_P \quad (\text{vecteur de l'aplégée})$$

On appelle le vecteur du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_0^F = \vec{OS} \wedge \vec{F} = \vec{r}_P \wedge \left(-\frac{Gm}{r^2} \vec{r} \right) = 0$$

Le moment cinétique est donc une constante du mouvement et occupe une direction fixe dans l'espace. \vec{OS} est donc perpendiculaire à une direction fixe : le vecteur de S est donc plan.

2. Constantes des axes

$$\vec{L}_0 = \vec{r}_P \wedge m(\vec{r}_P + \vec{r}\vec{\theta}) = m\vec{r}_P \wedge \vec{r}\vec{\theta} = \vec{L}_P \vec{g}$$

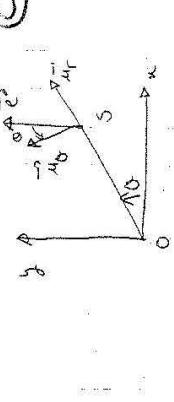
$$\vec{r}\vec{\theta} = \frac{\vec{L}_P}{m} = \text{constante des axes.}$$

3. Vecteur excentricité

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}\vec{\theta} - \frac{\vec{L}_P}{Gm} \frac{d\vec{r}}{dt} = -\vec{\theta}\vec{r}_P - \frac{\vec{L}_P}{Gm} \vec{a}$$

$$\text{Or } \vec{F} = -\frac{Gm}{r^2} \vec{r}_P = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = -\frac{Gm}{r^2} \vec{r}_P$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -\vec{\theta}\vec{r}_P + \frac{\vec{L}_P}{m} \vec{r}_P \quad \text{or } \vec{L}_P = m\vec{r}\vec{\theta} \quad \text{d'où} \\ \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{r} = \frac{\vec{L}_P}{m\vec{r}} \quad \text{la veille une excentricité et une constante du mouvement.}$$



4. Trajectoire

$$\begin{aligned} \text{On calcule } \vec{e} &= \vec{r} \wedge \vec{r} \\ \vec{e} \cdot \vec{r}_B &= e \cos \theta = \frac{r_1}{r_B} \cdot \vec{r}_B = \frac{L_P}{Gm} \left(\frac{1}{r_P} + \frac{1}{r_B} \right) \cdot \vec{r}_B \\ e \cos \theta &= 1 - \frac{L_P}{Gm} \cdot r \theta \quad \text{or } \theta = \frac{1}{r} \frac{L_P}{Gm} \end{aligned}$$

$$e \cos \theta = 1 - \frac{L_P}{Gm} \frac{1}{r} \quad \text{d'où:}$$

$$r = \frac{L_P^2 / Gm^2}{1 - e \cos \theta} = \frac{P}{1 - e \cos \theta}$$

$$P = \frac{L_P^2}{Gm^2} \quad \boxed{\text{La périodicité est une conséquence de la parallélité } P \text{ et d'excentricité } e.}$$

On peut déduire du texte que cette périodicité est une ellipse de périée $r_P = (h+R)$ et d'apogée $r_A = (h-R)$

5. Expression de e en termes de P

$$\text{On a } \frac{r_P}{P} = \frac{P}{1+e} \quad \text{et} \quad \frac{r_A}{P} = \frac{P}{1-e} \quad \text{d'où:}$$

$$r_P(1+e) = r_A(1-e) \Rightarrow (h+R)(1+e) = (h-R)(1-e)$$

$$e = \frac{h-h}{2R+4h} \quad \boxed{e = \frac{36000 - 500}{2 \times 64000 + 36000 - 500} = 0,73}$$

$$\text{D'autre part: } \frac{P}{r} = \frac{(1-e \cos \theta)}{(1+e \cos \theta)} = \frac{P}{r_P(1+e)}$$

$$P = \frac{(R+h)}{(1+\frac{h-h}{2R+4h})} \quad \boxed{P = \frac{2(R+h)}{2R+4h}}$$

$$P = \frac{2(6400+36000)(6400+500)}{2 \times 64000 + 36000 - 500} = 11,9 \times 10^3 \text{ km.}$$

6. Demi-grand axe a .

Le demi-grand axe a est défini par $a = RA = \frac{AP}{2}$

$$a = \frac{RA + r_A}{2} = \frac{1}{2} (2R + H + h)$$

$$a = R + \frac{H+h}{2}$$

7. Troisième loi de Kepler.

Le carré de la période orbitale T (temps mis pour parcourir l'ellipsoïde complet) est proportionnel au cube du demi-grand axe excentrique

$$\text{Soit : } \frac{T^2}{a^3} = \text{cste.} \quad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

8. Période T_h .

Dans le cas d'un astéroïde géostationnaire, le périiode orbitale est T et le demi-grand axe est $R+H$ d'où :

$$\frac{T_h^2}{a^3} = \frac{T^2}{(R+H)^3}, \quad T_h = \left(\frac{a}{R+H}\right)^{3/2} T$$

$$T_h = \left(\frac{2(R+H+h)}{2(R+H)}\right)^{3/2} T$$

$$T_h = 10,6h.$$

9. Angles d'orbite et de nette.

$$\Gamma = \frac{PA}{1 - e \cos \Theta}$$

$$\cos \Theta = \frac{1 - e^2}{e} \left(1 - \frac{r}{r_p}\right)$$

$$\Theta = \arccos \left(\frac{1 - e^2}{e} \left(1 - \frac{r}{r_p}\right) \right)$$

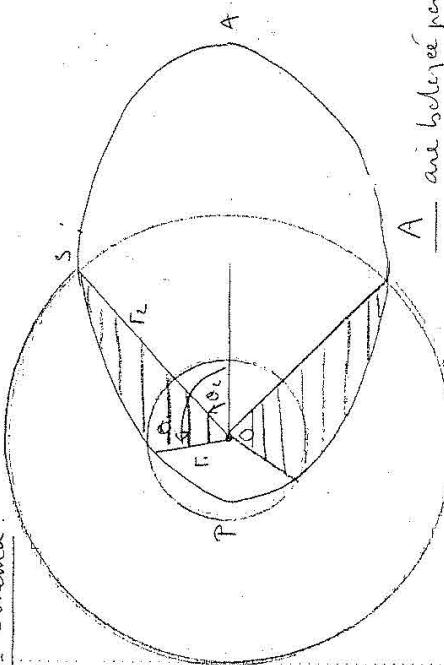
$$\Theta = \arccos \left(\frac{2(R+H+h)}{H+h} \left(1 - \frac{2(R+H)(R+H+h)}{2R+H+h} \frac{1}{r} \right) \right)$$

$$\Theta = \arccos \left(\frac{2(R+H+h)}{H+h} \frac{2(R+H)(R+H+h)}{H-h} \frac{1}{r} \right)$$

$$\Theta = \arccos \left[\frac{2}{H-h} \left(3R+H+h - \frac{2(R+H)(R+H+h)}{r} \right) \right]$$

$$\Theta_1 = 135^\circ \quad / \quad \Theta_2 = 33^\circ$$

10. Schéma.



$$\frac{A}{\frac{\text{aire bolloïde par unité de temps}}{\text{aire unitaire de surface bolloïde par unité de temps}}} = \frac{A}{\frac{Ae}{T_h}}$$

11. Renouvellement.

La période d'injection de S à l'air laisse ce dernier se renouveler dans la cavité de Van Allen. L'aire bolloïde par unité de temps est égale à A . On la multiplie par la densité ρ de l'air en vertu de l'équation $A = \frac{Ae}{T_h}$ où A est l'aire unitaire de surface bolloïde par unité de temps et T_h est la période de rotation de l'atmosphère terrestre.

$$e = \frac{G_0}{T_h} = \frac{A}{Ae} = \frac{A}{\frac{Ae}{T_h}} = \frac{T_h}{\pi r_p^2}$$