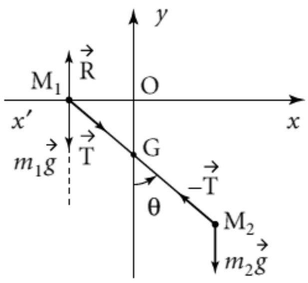
Pendule double.

1. Le mouvement du centre de masse G se déduit de l'application de la loi fondamentale de la dynamique appliquée à chacune des masses m_1 et m_2.



Pour m_1 seule, on a, en notant $\vec{R}$ la réaction du support $x'x$:

$$m_1\frac{d\overrightarrow{V_1}}{dt} = m_1\vec{g} + \vec{R} + \vec{T} \quad (1)$$

De même pour m_2 :

$$m_2\frac{d\overrightarrow{V_2}}{dt} = m_2\vec{g} + (-\vec{T}) \quad (2)$$

(la tige étant supposée sans masse, les forces $\vec{T}$ et $-\vec{T}$ sont bien portées par M_1M_2 et sont de sens opposés).

Éliminons $\vec{T}$ entre les deux équations :

$$\frac{d}{dt}(m_1\overrightarrow{V_1} + m_2\overrightarrow{V_2}) = (m_1 + m_2)\vec{g} + \vec{R} \quad (3)$$

Le glissement du point M_1 sur l'axe horizontal $x'x$ s'effectuant sans frottement, la réaction $\vec{R}$ est normale à $x'x$ (elle est de plus contenue dans le plan vertical Oxy). Soit :

$$\vec{R} = R\vec{u}_y$$

(3) donne alors en projection sur Ox : $\dfrac{d}{dt}(m_1V_{1x} + m_2V_{2x}) = 0$

c'est-à-dire $m_1V_{1x} + m_2V_{2x} = \text{cste} = 0$, les vitesses initiales étant nulles.

Or par définition du point G, on a : $(m_1 + m_2)\overrightarrow{V_G} = m_1\overrightarrow{V_1} + m_2\overrightarrow{V_2}$.

Il vient alors $V_{Gx} = 0$.

Le centre de masse se déplace sur la verticale passant par $G_0 = G(t = 0)$. On pourra donc étudier le mouvement dans le référentiel galiléen Oxy (O point fixe de $x'x$, l'axe Oy passant par G_0).

2. Le théorème de la puissance cinétique appliqué au système des deux masses s'écrit :

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{int}.$$

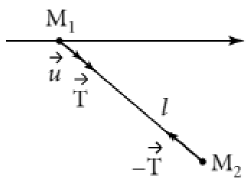
Ici $\mathcal{P}_{ext} = \mathcal{P}_{ext}(\text{poids}) + \mathcal{P}_{ext}(\vec{R})$.

Or $\mathcal{P}_{ext}(\vec{R}) = 0$ (force perpendiculaire au déplacement) ;

$$\mathcal{P}_{ext}(\text{poids}) = -\frac{dE_p}{dt} \quad \text{avec} \quad E_p = E_p(m_1) + E_p(m_2) = 0 + mgy(m_2)$$

(origine de l'énergie potentielle prise en $y = 0$).

Montrons que les tensions $\vec{T}$ et $-\vec{T}$ fournissent une puissance $\mathcal{P}_{int}$ globalement nulle. En effet :



$$\mathcal{P}_{int} = \vec{T}\cdot\vec{V}(M_1) - \vec{T}\cdot\vec{V}(M_2) = \vec{T}\cdot[\vec{V}(M_1) - \vec{V}(M_2)]$$

et $\mathcal{P}_{int} = \vec{T}\cdot\dfrac{d\overrightarrow{M_2M_1}}{dt}$, soit avec $\vec{T} = T\vec{u}$ et $\overrightarrow{M_1M_2} = +l\vec{u}$

$$\mathcal{P}_{int} = T\vec{u}\cdot\left(-l\frac{d\vec{u}}{dt}\right) \quad \text{(distance } M_1M_2 \text{ constante égale à } l)$$

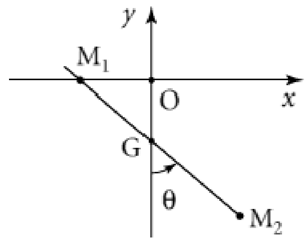
soit $\mathcal{P}_{int} = -\dfrac{lT}{2}\dfrac{d}{dt}(\vec{u}^2) = 0 \quad (\vec{u}^2 = 1)$

on a donc finalement : $\dfrac{dE_c}{dt} = -\dfrac{dE_p}{dt}$ et $\boxed{E_c + E_p = \text{cste}}$

Avec $E_p = -m_2 g l \cos\theta$.

Pour calculer l'énergie cinétique, on écrira en notant $(x_1\ ,\ 0)$ et $(x_2\ ,\ y_2)$ les coordonnées des points M_1 et M_2 dans le référentiel Oxy :

$$E_c = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2).$$



Exprimons x_1, x_2, y_2 en fonction de l'angle θ.

On a : $\begin{cases} m_1 GM_1 = m_2 GM_2 & \text{(propriété du centre de masse)} \\ GM_1 + GM_2 = l. \end{cases}$

Soit : $\quad GM_1 = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} l = l_1 \quad$ et $\quad GM_2 = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} l = l_2.$

Les coordonnées des points M_1 et M_2 s'écrivent dans le repère Oxy :

$$M_1 \begin{cases} x_1 = -l_1 \sin\theta \\ y_1 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad M_2 \begin{cases} x_2 = l_2 \sin\theta \\ y_2 = -l\cos\theta \end{cases}$$

D'où en remplaçant :

$$E_c = \left[\frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta\right] + \frac{1}{2}m_2[l_2^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + l^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta]$$

et, en utilisant les valeurs de l_1 et l_2 :

$$E_c = \frac{1}{2}\frac{l^2\dot{\theta}^2}{(m_1 + m_2)^2}[m_1 m_2^2\cos^2\theta + m_2 m_1^2\cos^2\theta + m_2(m_1 + m_2)^2\sin^2\theta]$$

$$E_c = \frac{1}{2}\frac{l^2\dot{\theta}^2}{(m_1 + m_2)^2}[m_1 m_2(m_1 + m_2)\cos^2\theta + m_2(m_1 + m_2)^2\sin^2\theta]$$

et $$E_c = \frac{1}{2}\frac{m_2 l^2\dot{\theta}^2}{m_1 + m_2}[m_1\cos^2\theta + (m_1 + m_2)\sin^2\theta]$$

$$E_c = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2\dot{\theta}^2\left[1 + \frac{m_2}{m_1}\sin^2\theta\right].$$

La conservation de l'énergie se traduit alors par l'équation $(\theta(t = 0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(t = 0) = 0)$:

$$\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2\dot{\theta}^2\left[1 + \frac{m_2}{m_1}\sin^2\theta\right] - m_2 g l\cos\theta = -m_2 g l\cos\theta_0.$$

Soit encore :

$$\dot{\theta}^2\left[1+\frac{m_2}{m_1}\sin^2\theta\right]+\frac{g}{l}\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)2(\cos\theta_0-\cos\theta) = 0 \quad (4)$$

Posons $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)}$, l'équation dévient :

$$\dot{\theta}^2\left[1+\frac{m_2}{m_1}\sin^2\theta\right]+4\omega^2\left[\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right] = 0 \quad (5)$$

Les valeurs permises de θ doivent vérifier $\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) > \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ ce qui impose $|\theta| \leqslant \theta_0$.
Le pendule double va osciller, de façon **non sinusoïdale**, entre les valeurs $-\theta_0$ et θ_0, la vitesse s'annulant lorsque M_2 atteint les positions d'altitude maximale ($\theta = \pm\theta_0$: énergie potentielle maximale pour le système), les vitesses de M_1 et M_2 étant non nulles quand θ passe par la valeur 0 (énergie potentielle minimale pour le système)…

3. Le mouvement est d'autant plus proche d'un mouvement sinusoïdal que $\theta(t)$ reste suffisamment petit (il faut donc qu'il en soit de même de θ_0). Cette approximation permet de ne conserver que les termes d'ordre deux (au plus) en θ et $\dot{\theta}$ dans l'équation (5), ce qui donne :

$$1+\frac{m_2}{m_1}\sin^2\theta = 1+o(\theta) \qquad \left(\frac{m_2}{m_1}\theta_0^2 \ll 1\right)$$

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{4}\theta^2+o(\theta^2) \qquad \left(\frac{\theta_0^2}{12} \ll 1\right).$$

D'où : $$\dot{\theta}^2+4\omega^2\left(\frac{\theta^2}{4}-\frac{\theta_0^2}{4}\right) \# 0 \Rightarrow \boxed{\dot{\theta}^2+\omega^2(\theta^2-\theta_0^2) = 0}$$

Cette dernière relation est l'équation énergétique d'un oscillateur harmonique non amorti et non forcé, de pulsation caractéristique ω.

La période T′ des petites oscillations est alors :

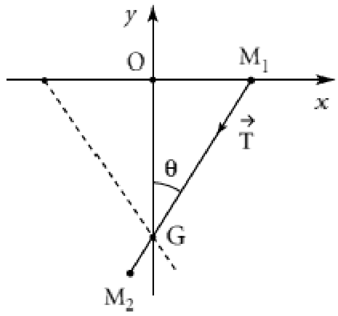
$$T' = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)}} \quad (6)$$

Commentaires

• Pour $m_1 \gg m_2$, on obtient $T' \# T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. La masse M_1 est alors quasiment fixe, et le système se réduit pratiquement à un **pendule simple de longueur *l*** et donc de période T_0 pour les petites amplitudes des mouvements.

• Pour $m_2 \gg m_1$, on a à la limite $G \sim M_2$ et $m_1\ddot{x}_1 \# -T\theta$ où $l\theta \sim x_1$.

Soit $\quad m_1\ddot{x}_1 + \dfrac{T}{l}x_1 = 0$



et en faisant (au premier ordre en x_1) $T \sim m_2 g$ (M_2 pratiquement immobile) :

$$m_1\ddot{x}_1 + \frac{m_2 g}{l}x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_1 + \left(\frac{m_2 g}{m_1 l}\right)x_1 = 0.$$

D'où une pulsation $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{m_2 g}{m_1 l}}$ et une période :

$$\boxed{T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \quad (m_2 \gg m_1)}$$

le résultat est conforme à l'expression générale (6) dans l'hypothèse où la masse m_2 est suffisamment grande devant m_1 $\left(1 + \dfrac{m_2}{m_1} \sim \dfrac{m_2}{m_1}\right)$.