Stabilisation par champ magnétique.

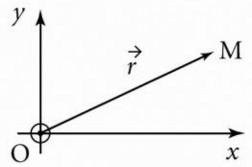
1. La particule est soumise à la force électrostatique $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(qV)$, avec :

$$\vec{F} = -\frac{qV_0}{a^2}(x\vec{u}_x + y\vec{u}_y - 2z\vec{u}_z).$$

Une position d'équilibre correspond à $\vec{F} = \vec{0}$, c'est-à-dire à $x = y = z = 0$.

L'origine O est bien associée à une position d'équilibre ($\vec{F}(0, 0, 0) = \vec{0}$).

Montrons que cet équilibre est instable. Il suffit ici de constater que la particule est soumise, dans le plan xOy, à la force $\overrightarrow{F_{//}}$ telle que :



$$\overrightarrow{F_{//}} = \frac{(-q)V_0}{a^2}\vec{r} \quad \text{où} \quad \vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y.$$

Cette force a naturellement tendance à éloigner la particule de sa position d'équilibre ce qui traduit l'instabilité ; par contre la force selon Oz – $\overrightarrow{F_z} = \frac{2qV_0}{a^2}z\vec{u}_z$ – présente un effet stabilisateur.

2. a. À la force précédente, s'ajoute la force magnétique $\vec{f}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

Le champ $\vec{B} = B_0\vec{u}_z$ étant dirigé selon Oz, la force $\vec{f}_m$ n'a aucune influence sur le mouvement selon $z'z$. La loi fondamentale de la dynamique donne, en projection sur Oz :

$$m\ddot{z} = +\frac{2qV_0}{a^2}z \quad \Rightarrow \quad \ddot{z} + 2\omega_0^2 z = 0$$

où l'on a posé $\omega_0^2 = \dfrac{(-q)V_0}{ma^2} > 0$.

Il s'agit du mouvement d'un oscillateur harmonique libre non amorti et de pulsation caractéristique $\omega_0' = \sqrt{2}\omega_0$.

Soit avec des conditions initiales $z(0)$ et $\dot{z}(0)$:

$$\boxed{z(t) = z(0)\cos\omega_0' t + \frac{\dot{z}(0)}{\omega_0'}\sin\omega_0' t}$$

Ce résultat traduit également la stabilité de l'équilibre par rapport aux mouvements selon $z'z$.

2. b. La loi fondamentale de la dynamique s'écrit ici avec $\overrightarrow{OM} = \vec{r} + z\vec{u}_z$:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{qV_0}{a^2}(\vec{r} - 2z\vec{u}_z) + q\vec{v} \wedge B_0\vec{u}_z$$

soit en projection sur le plan xOy :

$$m(\ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y) = -\frac{qV_0}{a^2}\vec{r} + q\vec{v} \wedge B_0\vec{u}_z$$

ce qui donne : $\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{qV_0}{ma^2}x + \dfrac{qB_0}{m}\dot{y} \\ \ddot{y} = -\dfrac{qV_0}{ma^2}y - \dfrac{qB_0}{m}\dot{x}. \end{cases}$

Et en posant $\omega_0^2 = \dfrac{(-q)V_0}{ma^2}$ et $\omega_c = \dfrac{(-q)B_0}{m}$, on aboutit à :

(1) $\left\{\begin{aligned} \ddot{x} &= \omega_0^2 x - \omega_c\dot{y} \\ \ddot{y} &= \omega_0^2 y + \omega_c\dot{x} \end{aligned}\right\}$ système d'équations couplées (rôle de $\vec{B}$).

On cherche des solutions au système linéaire constitué par les équations (1) sous la forme $x(t) = x_0 e^{pt}$ et $y(t) = y_0 e^{pt}$. Reportant ces solutions dans (1) et (2) et simplifiant par e^{pt}, il vient : $\begin{cases} p^2 x_0 = \omega_0^2 x_0 - \omega_c p y_0 \\ p^2 y_0 = \omega_0^2 y_0 + \omega_c p x_0 \end{cases}$

soit encore $\begin{cases} (p^2 - \omega_0^2)x_0 + \omega_c p y_0 = 0 \\ -\omega_c p x_0 + (p^2 - \omega_0^2)y_0 = 0. \end{cases}$

Il s'agit là d'un système de Cramer en x_0 et y_0 paramétré par p.

On obtient $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ pour $\begin{vmatrix} (p^2-\omega_0^2) & \omega_c p \\ -\omega_c p & (p^2-\omega_0^2) \end{vmatrix} = 0.$

Les valeurs de p (dans $\mathbb{C}$) sont donc solutions de l'équation :

$(p^2-\omega_0^2)^2 + \omega_c^2 p^2 = 0 \Rightarrow \boxed{p^4 + (\omega_c^2 - 2\omega_0^2)p^2 + \omega_0^4 = 0}$

Notons p_1^2 et p_2^2 les racines correspondantes. Elles vérifient :

$$p_1^2 p_2^2 = \omega_0^4 > 0 \text{ et } p_1^2 + p_2^2 = 2\omega_0^2 - \omega_c^2.$$

De plus, $\Delta = (\omega_c^2 - 2\omega_0^2)^2 - 4\omega_0^4 = \omega_c^4 - 4\omega_c^2\omega_0^2 = \omega_c^2(\omega_c^2 - 4\omega_0^2)$.

D'où :

• pour $\Delta < 0$, il vient $p_1^2 = \alpha + i\beta$ et $p_2^2 = \alpha - i\beta$ et par conséquent : $p_1 = \pm(\alpha' + i\beta')$ et $p_2 = \pm(\alpha' - i\beta')$; les solutions en $e^{(\alpha' \pm i\beta)t} = e^{\alpha' t}e^{\pm i\beta' t}$ avec $\alpha' > 0$ divergeraient ce qui entraînerait l'instabilité.

• Pour $\Delta > 0$, les racines en p^2 sont réelles et négatives puisque $\Delta > 0$ assure également $p_1^2 + p_2^2 < 0$ ($p_1^2 p_2^2 > 0$ nous indiquant que les racines réelles sont de même signe). Dans ce cas, on a donc $p_1 = \pm i\alpha_1$ et $p_2 = \pm i\alpha_2$ ce qui correspond à des solutions sinusoïdales, donc bornées.

Pour assurer la stabilité de l'équilibre $x = y = z = 0$, il faut donc que l'on ait $\Delta > 0$, c'est-à-dire $\omega_c^2 > 4\omega_0^2$, ce qui donne :

$$\omega_c > 2\omega_0 \Rightarrow \boxed{B_0 > \frac{2}{a}\sqrt{\frac{mV_0}{(-q)}}} \quad (2)$$

Commentaires

• Le sens de $\overrightarrow{B_0}$ ne modifie en rien la conclusion (changer z en $-z$ et x en y n'affecte pas la nature physique du problème). On écrira donc la condition (2) sous la forme :

$$|B_0| > \frac{2}{a}\sqrt{\frac{mV_0}{(-q)}}.$$

• En présence du champ magnétique, on a toujours $E_m = E_c + E_p =$ cste (la force magnétique $\overrightarrow{f_m} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ ne travaille pas). Ainsi bien que le point O corresponde, pour le plan xOy, à un maximum d'énergie potentielle ($E_p(x, y, z = 0) = \frac{qV_0}{2a^2}(x^2 + y^2)$, et $q < 0$), la force supplémentaire $\overrightarrow{f_m}$ stabilise la charge q : dans ce cas, un maximum d'énergie potentielle n'est donc pas nécessairement associé à une position d'équilibre instable…