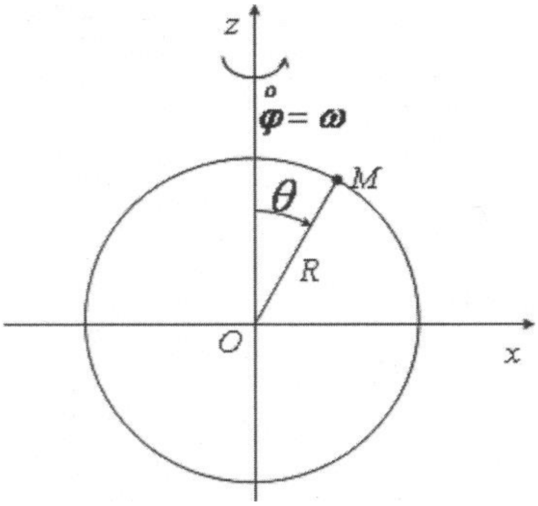
¤ PCSI ¤ 19/20. Approfondissement. Série 1.

Mouvement sur un cercle en rotation.

Note : les quatre parties sont largement indépendantes, à condition d'admettre les résultats de la question 1.4.



On considère une bille *M*, de masse *m*, assimilable à un point matériel, pouvant glisser à l'intérieur d'une gouttière circulaire de rayon *R* et de centre *O* sans frottements. Cette gouttière est en mouvement circulaire uniforme à la vitesse angulaire $\omega = \dot{\varphi} = Cste$ autour d'un axe vertical *Oz*. Le dispositif est représenté sur le schéma. On désignera par θ l'angle que fait (*OM*) avec la verticale ascendante passant par *O*, et on notera $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ l'accélération de la pesanteur. Enfin, on utilisera généralement $\alpha = \pi - \theta$, angle entre (*OM*) et la verticale *descendante*.

On considérera dans tous le problème que $\omega \geq 0$, et on se restreindra, pour des raisons de symétrie, à $0 \leq \theta \leq \pi$.

On rappelle l'expression générale de l'accélération en coordonnées sphériques :

$$\vec{a} = \begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta \end{cases}$$

1. Etudes préliminaires

1.1 Justifier brièvement que l'on utilise, pour étudier le problème, les coordonnées sphériques définies par r, θ et φ sur le schéma.

1.2 Ecrire, dans ce système de coordonnées et dans le cas particulier du problème, la vitesse du point *M*, en fonction de $R, \theta, \dot{\theta}, \omega$ et des vecteurs de base $\left(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi\right)$.

1.3 Déterminer par ailleurs la relation entre $v_z = \dot{z}$ et $\dot{\theta}$ et les coordonnées *R* et θ.

1.4 On désigne par *N* la réaction de la circonférence sur la bille, et par N_r, N_θ et N_φ ses composantes dans la base utilisée. Montrer que l'on a l'égalité suivante :

$$2mR\omega\dot{\theta}\cos\theta = N_\varphi \qquad (1)$$

et que cette égalité est équivalente à :

$$2mR\omega\dot{\alpha}\cos\alpha = N_\varphi$$

1.5 Déterminer la valeur de N_r en fonction de *m, g, R,* ω, $\theta, \dot{\theta}$ puis en fonction de *m, g, R,* $\omega, \alpha, \dot{\alpha}$.

1.6 Déterminer par un raisonnement physique simple la valeur de N_θ.

1.7 Déterminer finalement l'équation différentielle du mouvement en θ, puis en α.

2. Approche énergétique

2.1 Déterminer l'expression de l'énergie cinétique du point M en fonction de $R, \theta, \dot{\theta}, m$ et ω.

2.2 En exprimant le travail élémentaire et en se servant de la relation (1), montrer que la résultante N travaille. Comment cela s'explique-t-il ici ?

2.3 En utilisant l'expression de v_φ, composante orthoradiale de la vitesse, et de la relation (1), déterminer la puissance $p\left(\vec{N}\right)$ fournie par la réaction du cercle à la bille M en fonction de $R, \theta, \dot{\theta}, m$ et ω.

2.4 En utilisant l'expression de v_z, donner de la même façon l'expression de la puissance $p\left(m\vec{g}\right)$ fournie par le poids au point M en fonction de $R, \theta, \dot{\theta}, m$ et ω.

2.5 Retrouver alors l'équation différentielle du mouvement obtenue en 1.7.

2.6 Donner alors l'équation en α qu'il faudrait résoudre pour déterminer les positions d'équilibre du système (on ne cherchera pas pour l'instant à résoudre cette équation).

3. Stabilité des équilibres.

3.1 A l'aide de l'équation précédente, obtenir la relation suivante, appelée intégrale première de l'énergie : $\frac{1}{2}R\dot{\alpha}^2 - g\cos\alpha + \frac{R\omega^2}{2}\cos^2\alpha = \frac{E_o}{mR} = Cte$

Quelle est l'unité de E_o ? De quelle loi physique cette relation procède-t-elle ?

3.2 Justifier que l'on puisse mettre cette relation sous la forme :

$$E_o = E_{c,eff}\left(\dot{\alpha}\right) + E_{p,eff}\left(\alpha\right)$$

où $E_{c,eff}$ est une énergie cinétique effective ne dépendant que de $\dot{\alpha}$ et des données du problème, et $E_{p,eff}$ une énergie potentielle effective ne dépendant que de α et des données du problème.

3.3 Montrer alors qu'il existe une valeur critique de ω, appelée ω_c, pour laquelle le nombre de positions d'équilibre change.

3.4 On se place dans cette question dans le cas où il existe une position d'équilibre α_e différente de 0 ou π

Dans le cadre des petites oscillations autour d'une position d'équilibre stable, on peut écrire l'énergie potentielle effective sous la forme : $E_{p,eff} = E_{p,eff}\left(\alpha_e\right) + \frac{k}{2}\left(\alpha - \alpha_e\right)^2$

Rappeler la relation entre k et l'énergie potentielle effective, et déterminer k en fonction de m, R, ω_c et ω et conclure sur le fait que la position d'équilibre α_e est effectivement stable.