Mouvement sur un cercle en rotation

1 - Etudes préliminaires.

1.1. Coordonnées sphériques.

le point M est amené à se déplacer à l'intérieur d'une sphère de rayon R ce qui justifie l'emploi des coordonnées sphériques.

0,25

1.2. Vitesse

le vecteur vitesse a pour expression générale en coordonnées sphériques

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{u}_\varphi$$

Ici $r = R = cte \rightarrow \dot{r} = 0$

$\dot{\varphi} = \omega = cte$

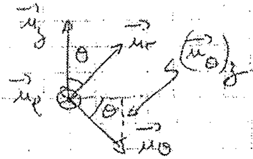
On obtient :

0,75 $$\boxed{\vec{v} = R\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + R\omega\sin\theta\,\vec{u}_\varphi}$$

1.3. Vitesse en projection suivant $\vec{u}_z$

Suivant $\vec{u}_z$ reste la composante suivant $\vec{u}_\theta$ a une composante non nulle :

$(\vec{u}_\theta)_z = -\sin\theta$



D'où :

$$v_z = \vec{v}\cdot\vec{u}_z = R\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta\cdot\vec{u}_z$$

0,5 $$\boxed{v_z = -R\dot{\theta}\sin\theta}$$

1.4. Coordonnées de N_φ

On étudie la masse m dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Ce système est soumis à :

son poids $\vec{P} = m\vec{g}$

la réaction $\vec{N}$, perpendiculaire au cercle (Δ pas comprise dans le plan $(\vec{u}_r, \vec{u}_z)$)

0,25 La seconde loi de Newton permet d'écrire :

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$$

En projection suivant $\vec{u}_\varphi$:

$N_\varphi = m a_\varphi$

0,5 $$\boxed{N_\varphi = 2mR\omega\dot{\theta}\cos\theta}$$

Comme $\alpha = \pi - \theta$ on a $\dot{\alpha} = -\dot{\theta}$ et $\cos\theta = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

On obtient ainsi

0,5 $$\boxed{N_\varphi = 2mR\omega\dot{\alpha}\cos\alpha}$$

1.5. Expression de N_r

La relation de la dynamique suivant $\vec{u}_r$ s'écrit :

$$-mg\cos\theta + N_r = m(-R\dot{\theta}^2 - R\omega^2\sin^2\theta)$$

$$N_r = m(g\cos\theta - R\dot{\theta}^2 - R\omega^2\sin^2\theta)$$

En fonction de α et $\dot{\alpha}$ cette relation s'écrit :

$$N_r = m(-g\cos\alpha - R\dot{\alpha}^2 - R\omega^2\sin^2\alpha)$$

0,5 $$\boxed{N_r = -m(g\cos\alpha + R\dot{\alpha}^2 + R\omega^2\sin^2\alpha)}$$

1.6. Expression de N_θ

Comme le point M peut glisser sans frottements sur le cercle, il n'y a pas de composante pour la réaction suivant $\vec{u}_\theta$:

0,25 $N_\theta = 0$

1.7. Equation différentielle en θ puis en α

La projection de la loi de Newton suivant $\vec{u}_\theta$ donne :

$$mg\sin\theta = -mR\sin\theta\cos\theta\,\omega^2 + mR\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} - \sin\theta\left(\frac{g}{R} + \omega^2\cos\theta\right) = 0$$

Soit

$$-\ddot{\alpha} - \sin\alpha\left(\frac{g}{R} - \omega^2\cos\alpha\right) = 0$$

0,5 $$\boxed{\ddot\alpha + \sin\alpha\left(\frac{g}{R} - \omega^2\cos\alpha\right) = 0}$$

2. Approche énergétique

2.1. Energie cinétique

0,25 $$\boxed{E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m R^2\left(\dot\theta^2 + \omega^2\sin^2\theta\right)}$$

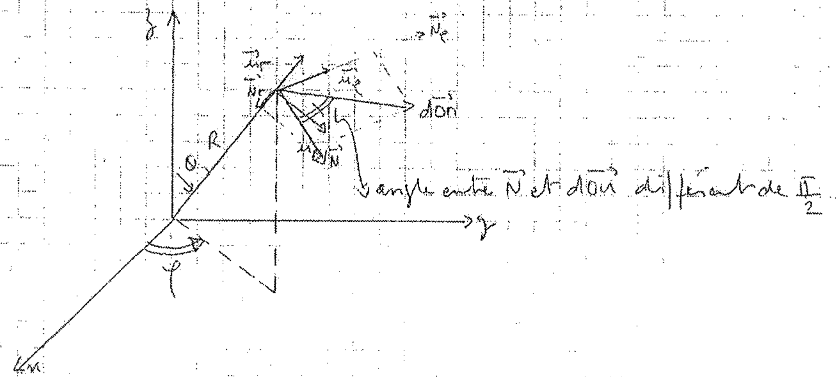
2.2. Travail de $\vec N$

$\delta W(\vec N) = \vec N\cdot d\vec{OM} = \vec N\cdot\left(dr\,\vec u_r + r\,d\theta\,\vec u_\theta + r\sin\theta\,d\varphi\,\vec u_\varphi\right)$

or $r = R = cte \Rightarrow d\vec{OM} = R\,d\theta\,\vec u_\theta + R\sin\theta\,d\varphi\,\vec u_\varphi$

0,5 $\delta W(\vec N) = N_\varphi R\sin\theta\,d\varphi = N_\varphi R\sin\theta\,d\varphi = 2mR^2\omega\dot\theta\cos\theta\sin\theta\,d\varphi$

0,5 La réaction $\vec N$ travaille car tout en étant perpendiculaire au cercle, elle ne se trouve pas perpendiculaire au vecteur déplacement dans le référentiel terrestre.



2.3. Puissance de $P(\vec N)$

$p(\vec N) = \vec N\cdot\vec v = N_\varphi v_\varphi$ car $N_\theta = 0$ et $N_r = 0$

$p(\vec N) = 2mR\omega\dot\theta\cos\theta \times R\omega\sin\theta$

01 $$\boxed{p(\vec N) = 2mR^2\omega^2\dot\theta\cos\theta\sin\theta}$$

On pouvait trouver cela en écrivant $p(\vec N) = \frac{dW}{dt}$ et en notant que $\dot\varphi = \omega$

2.4. Puissance du poids

$p(m\vec g) = m\vec g\cdot\vec v = -mg\,v_z = -mg(-R\dot\theta\sin\theta)$

0,5 $$\boxed{p(m\vec g) = mgR\dot\theta\sin\theta}$$

2.5. Equation différentielle

Pour retrouver l'équation différentielle du mouvement, on utilise le théorème de la puissance cinétique :

$$\frac{dE_c}{dt} = p(\vec N) + p(m\vec g)$$

$$\frac{1}{2}mR^2\left(2\dot\theta\ddot\theta + \omega^2\dot\theta\,2\sin\theta\cos\theta\right) = 2mR^2\omega^2\dot\theta\cos\theta\sin\theta - mgR\dot\theta\sin\theta$$

Pour $\dot\theta \neq 0$ on obtient :

$$\ddot\theta + \omega^2\sin\theta\cos\theta = 2\omega^2\cos\theta\sin\theta - \frac{g}{R}\sin\theta$$

0,5 $$\boxed{\ddot\theta - \sin\theta\left(\omega^2\cos\theta + \frac{g}{R}\right) = 0}$$

On retrouve la même équation différentielle qu'en 1.7.

2.6. Equation différentielle en α.

0,25 $$\boxed{\ddot\alpha + \sin\alpha\left(\frac{g}{R} - \omega^2\cos\alpha\right) = 0}$$

3. Stabilité des équilibres

3.1. Intégrale première de l'énergie

On multiplie l'équation différentielle en α par $\dot\alpha$

$$\ddot\alpha\dot\alpha + \dot\alpha\sin\alpha\,\frac{g}{R} - \omega^2\dot\alpha\cos\alpha\sin\alpha = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot\alpha^2 - \frac{g}{R}\cos\alpha + \frac{1}{2}\omega^2\cos^2\alpha\right) = 0$$

Soit en multipliant par R

0,5 $$\boxed{\frac{1}{2}R\dot\alpha^2 - g\cos\alpha + \frac{1}{2}R\omega^2\cos^2\alpha = cte = \frac{E_0}{mR}}$$

E_0 est l'énergie mécanique qui s'exprime en joule (J)

0,25 Ce résultat traduit la conservation de l'énergie mécanique.

3.2 Energies effectives

0,5

$$\boxed{E_0 = \underbrace{\frac{1}{2} m R^2 \dot{\alpha}^2}_{E_{c,eff}(\dot\alpha)} \underbrace{- mgR\cos\alpha + \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 \cos^2\alpha}_{E_{p,eff}(\alpha)}}$$

3.3 Pulsation critique ω_c

On dérive $E_{p_{eff}}(\alpha)$ par rapport à α.

$$\frac{dE_p}{d\alpha} = mgR\sin\alpha - \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 2 \cos\alpha \sin\alpha$$

1 $$\frac{dE_p}{d\alpha} = m R^2 \sin\alpha \left(\frac{g}{R} - \omega^2 \cos\alpha \right)$$

0,5 $\frac{dE_p}{d\alpha} = 0$. pour $\sin\alpha = 0$ soit $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$ et cela quelque soit la valeur ω

0,75 . pour $\cos\alpha = \frac{(g/R)}{\omega^2} < 1$ soit pour $\omega > \sqrt{\frac{g}{R}} = \omega_c$

3.4 Expression de k

0,25 $E_{p_{eff}}(\alpha) = E_{p_{eff}}(\alpha_e) + \frac{k}{2}(\alpha - \alpha_e)^2$ avec $k = \left(\frac{d^2 E_{p_{eff}}}{d\alpha^2}\right)_{\alpha=\alpha_e}$

Dans le cadre de cette question α_e est défini par

$$\cos\alpha_e = \frac{g}{R\omega^2} = \frac{\omega_c^2}{\omega^2} < 1$$

$$\frac{d^2 E_p}{d\alpha^2} = m R^2 \cos\alpha \left(\frac{g}{R} - \omega^2 \cos\alpha \right) + m R^2 \sin\alpha \, \omega^2 \sin\alpha$$

$$= m R^2 \left(\frac{g}{R} \cos\alpha - \omega^2 \cos^2\alpha + \omega^2 \sin^2\alpha \right)$$

$$= m R^2 \left(\frac{g}{R} \cos\alpha + \omega^2 (\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) \right)$$

$$= m R^2 \left(\frac{g}{R} \cos\alpha + \omega^2 (1 - 2\cos^2\alpha) \right)$$

$$k = \left(\frac{d^2 E_p}{d\alpha^2}\right)_{\alpha=\alpha_e} = m R^2 \left(\frac{g}{R} \frac{g}{R} \frac{1}{\omega^2} + \omega^2 \left(1 - 2 \frac{g^2}{R^2} \frac{1}{\omega^4} \right) \right)$$

$$= m R^2 \left(\frac{g^2}{R^2} \frac{1}{\omega^2} + \omega^2 - 2 \frac{g^2}{R^2} \frac{1}{\omega^2} \right)$$

$$= m R^2 \left(\omega^2 - \frac{g^2}{R^2} \frac{1}{\omega^2} \right) = m R^2 \omega^2 \left(1 - \frac{g^2}{R^2} \frac{1}{\omega^4} \right)$$

0,25 $$\boxed{k = m R^2 \omega^2 \left(1 - \frac{\omega_c^4}{\omega^4} \right) > 0}$$

k est bien positif ce qui permet de conclure que la position angulaire $\alpha_e = \arccos\left(\frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)$ est bien une position d'équilibre stable.