Détente irréversible d'un gaz parfait.

1. L'équation du gaz parfait s'écrit, pour la mole de gaz initialement contenue dans A :

$$PV = RT \quad \text{soit} \quad T_A = \frac{P_0 V_A}{R} = \mathbf{301\ K.}$$

2. a. Le gaz va passer du compartiment A vers le compartiment B ce qui va provoquer le déplacement du piston. La fin de cette transformation sera atteinte :

- soit parce que la pression dans B atteint la valeur P_0, ce qui réalise l'équilibre mécanique ;
- soit parce que le piston $\mathcal{P}$ vient buter sur la cloison fixe F, tout le gaz de A étant passé dans B.

Il est évident que la seconde possibilité ne peut se réaliser que pour un volume du compartiment B suffisamment grand, soit $V_B > V_s$, valeur-seuil qui reste à déterminer…

2. b. Dans ce cas, d'après ce qui précède, à l'équilibre, on a :

$$P_A = P_B = P_0 \quad \text{soit} \quad \boxed{P_1 = P_0}$$

et $V_1 = V_B + V'_A$ (V'_A volume du gaz restant en A) avec $P_1 V_1 = RT_1$.

D'autre part, considérons le système constitué par les compartiments A et B et leur contenu, et appliquons-lui le premier principe :

$$\Delta U_{syst} = W + Q \quad (1)$$

avec $\Delta U_{syst} = \Delta U_{gaz} + \Delta U_{parois} = \Delta U_{gaz}$,

car les parois – par hypothèse – n'absorbent pas d'énergie (parois adiabatiques, et cloison F de capacité thermique négligeable).

D'où $\Delta U_{gaz} = C_v(T_1 - T_A)$.

D'autre part $Q = 0$ (parois adiabatiques) (2)

Et $W = -\int P_{ext} dV = -P_0 \Delta V$ (puisque $P_{ext} = P_0$).

ΔV représentant le volume balayé par le piston mobile :

$$\Delta V = V'_A - V_A = (V_1 - V_B) - V_A = V_1 - (V_A + V_B),$$

soit $W = -P_0[V_1 - V_A - V_B]$ (3)

(1) donne alors avec (2) et (3) : $C_v(T_1 - T_A) = -P_0 V_1 + P_0(V_A + V_B)$.

Or $P_1 V_1 = RT_1$ et $P_0 V_A = RT_A$, soit :

$$\frac{C_v}{R}(P_1 V_1 - P_0 V_A) = -P_0 V_1 + P_0(V_A + V_B).$$

Soit en tenant compte de $P_1 = P_0$ et $\frac{C_v}{R} = \frac{1}{\gamma - 1}$

$$V_1 - V_A = (\gamma - 1) \cdot [-V_1 + V_A + V_B] \Rightarrow \gamma V_1 = \gamma V_A + (\gamma - 1) V_B.$$

D'où : $\boxed{V_1 = V_A + \frac{\gamma - 1}{\gamma} V_B}$

Il lui correspond une température T_1 définie par $P_1 V_1 = RT_1$ avec $P_1 = P_0$.

$$\boxed{T_1 = \frac{P_0}{R}\left[V_A + \frac{\gamma - 1}{\gamma} V_B\right]}$$

Application numérique : $V_1 = 25 + \frac{0{,}4}{1{,}4} \cdot 25 \Rightarrow \mathbf{V_1 = 32{,}1\ L}$

$$\mathbf{T_1 = 387\ K.}$$

2. c. La solution ci-dessus reste valable tant qu'il reste du gaz dans le compartiment A.

C'est-à-dire tant que : $V'_A > 0$, soit $V_1 > V_B$,

et, en remplaçant V_1 par son expression : $V_B < V_A + \frac{\gamma - 1}{\gamma} V_B$

$$V_B < \gamma V_A$$

la valeur-seuil de V_B est donc $\boxed{V_s = \gamma V_A}$

2. d. Dans ce cas, tout le gaz passe de A dans B, et $\boxed{V_2 = V_B}$

avec $P_2 \leqslant P_0$ et $P_2 V_2 = RT_2$,

et le travail W reçu par le gaz a pour expression :

$$W = -P_0 \Delta V = -P_0(-V_A) = +P_0 V_A.$$

L'application du premier principe donne alors :

$$\Delta U_{système} = \Delta U_{gaz} = Q + W = 0 + W.$$

Soit encore : $C_v(T_2 - T_A) = P_0V_A$,

d'où : $\dfrac{C_v}{R}(P_2V_2 - P_0V_A) = P_0V_A \Rightarrow P_2V_2 = P_0V_A\left(1 + \dfrac{R}{C_v}\right)$

et $\boxed{P_2 = \gamma P_0 \dfrac{V_A}{V_B}}$ $(V_2 = V_B)$.

On en déduit T_2 :

$$T_2 = \frac{1}{R}P_2V_2 = \frac{1}{R} \cdot \gamma P_0 \frac{V_A}{V_B} \cdot V_B,$$

$$\boxed{T_2 = \gamma \frac{P_0V_A}{R} = \gamma T_A}$$

Et on peut vérifier que la condition $P_2 \leqslant P_0$ correspond bien à $V_B \geqslant \gamma V_A = V_s$ …

Application numérique :

$$P_2 = \frac{\gamma}{2} \cdot P_0 = \mathbf{0{,}7 \cdot 10^5\ Pa}$$

$$T_2 = \mathbf{421\ K.}$$

3. Notons que l'état final – quand il reste du gaz dans le compartiment A, $V_1 > V_B$ – ne dépend pas du caractère quasi statique ou non de la transformation (on peut faire un gros trou dans la paroi F !), puisque l'expression du travail reste la même.

La transformation est de toute façon irréversible, ce qui se traduit par l'augmentation de l'entropie du gaz (évolution spontanée d'un système thermiquement isolé…).

On a pour un gaz parfait (avec C_v = cste) :

$$\Delta S = nC_v \ln\left(\frac{P_FV_F^\gamma}{P_IV_I^\gamma}\right).$$

• Cas du **2. b.** où $P_F = P_I = P_0$; $V_I = V_A$ et $V_F = V_1 > V_A$:

$$\Delta S = C_v \ln\left(\frac{V_1}{V_A}\right)^\gamma = \gamma C_v \ln\left(\frac{V_1}{V_A}\right) > 0.$$

• Cas du **2. d.** où $P_F = P_2$, $P_I = P_0$; $V_I = V_A$ et $V_F = V_B$:

$$\Delta S = C_v \ln\left[\frac{P_2}{P_0}\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^\gamma\right] = C_v \ln\left[\gamma\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma - 1}\right]$$

or $V_B > V_s = \gamma V_A \Rightarrow \Delta S > C_v \ln[\gamma\gamma^{\gamma - 1}] = C_v\gamma \ln\gamma > 0$.

On a bien dans les deux cas $\Delta S > 0$ comme nous l'indique l'application du second principe : $\Delta S = 0 + \sigma > 0$ (pas d'échanges thermiques avec l'extérieur), la transformation étant irréversible.

On voit bien qu'il serait faux d'écrire PV^γ = cste (qui conduirait à $\Delta S = 0$) : la transformation est certes adiabatique, mais elle est – dans tous les cas – **irréversible.**