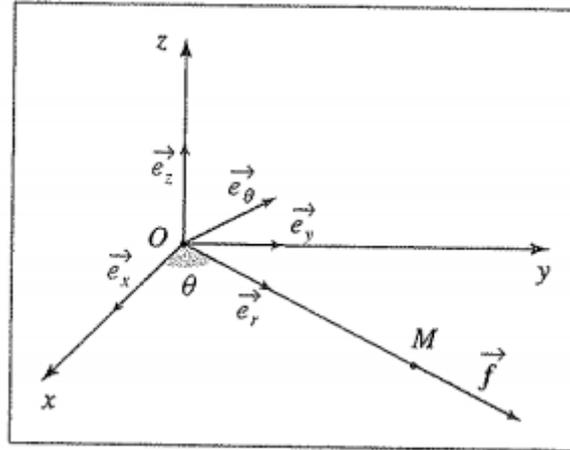


Mouvement à force centrale. Satellite.

Partie 1.

On considère dans un référentiel galiléen une particule P de masse m , soumise à une force centrale $\vec{f} = f_r(r)\vec{e}_r$ et décrivant un mouvement contenu dans le plan (Ox, Oy) .



1. En posant $u = 1/r$ et à l'aide de la constante de la loi des aires $C = r^2\dot{\theta}$ démontrer que la vitesse \vec{v} et l'accélération \vec{a} peuvent s'exprimer à l'aide de u et des dérivées de u par rapport à θ sous la forme suivante :

$$\vec{v} = C \left(-\frac{du}{d\theta} \vec{e}_r + u \vec{e}_\theta \right) ; \vec{a} = -C^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) \vec{e}_r \quad \text{Formules de Binet}$$

2. En appliquant la seconde loi de Newton, déterminer la loi de force $f_r(r)$ pour que la trajectoire de la particule soit une spirale logarithmique $r = a \exp \theta$. On précisera la constante de la loi des aires à partir des conditions initiales r_o et θ_o .
3. A $t = 0$, la particule P est lancée en P_o ($\vec{r}_o = \overline{OP}_o, \theta_o = 0$) avec une vitesse \vec{v}_o orthogonale à \vec{r}_o . Déterminer sa trajectoire sachant qu'elle se trouve dans un champ de forces centrales attractives : $\vec{f} = -\frac{k}{r^3} \vec{e}_r$. Discuter suivant les valeurs de $v_o = \|\vec{v}_o\|$ la nature des trajectoires possibles.
4. On considère maintenant que dans un référentiel galiléen la particule P de masse m est soumise à une force centrale $\vec{f} = -\frac{k}{r^2} \vec{e}_r$ et décrivant un mouvement contenu dans le plan (Ox, Oy) . En appliquant la relation fondamentale de la dynamique à la masse m , déterminer une équation différentielle du second ordre en u par rapport à θ . Montrer que la résolution de cette équation différentielle conduit à exprimer la distance r sous la forme : $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$. Déterminer les expressions de p et e en fonction de C et de m .

Partie 2.

Le satellite Hipparcos devait être placé sur une orbite géostationnaire à une altitude $H = 36\,000$ km. Un problème de mise à feu du moteur d'apogée a laissé Hipparcos sur son orbite de transfert, son altitude variant entre $h = 500$ km et H .

Au cours d'une révolution, il passe dans la ceinture de Van Hallen. On supposera que cette ceinture est comprise entre deux sphères de rayon $r_1 = 8\,400$ km, $r_2 = 28\,000$ km et de centre celui de la

Terre. La ceinture de Van Hallen est constituée de particules chargées piégées dans le champ magnétique terrestre qui « aveuglent » les détecteurs d'Hipparcos interrompant ainsi les mesures des positions des étoiles objets de la mission.

On assimile la Terre à une sphère de centre O , de rayon $R = 6\,400$ km et de masse M et le satellite à un point matériel (S, m) . On suppose le référentiel géocentrique (Rgc) galiléen. La période de rotation de la Terre dans ce référentiel appelée jour sidéral vaut $T = 86\,164$ s. On note G la constante de gravitation, sa valeur numérique n'est pas utile dans ce problème.

1. Exprimer la force qui s'exerce sur S .

Montrer que le moment cinétique \vec{L} en O du satellite est une constante du mouvement. En déduire que le mouvement du satellite est plan.

2. On pose que le mouvement s'effectue dans le plan perpendiculaire à l'axe Oz et on utilise les coordonnées cylindriques $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$. Exprimer la quantité $r^2\dot{\theta}$ en fonction de L_z et m .

Quelle est le nom de cette grandeur ?

3. Montrer que le vecteur excentricité $\vec{e} = \vec{u}_\theta - \frac{L_z}{GMm} \vec{v}$ est une constante du mouvement (\vec{v} étant la vitesse du satellite).

4. On choisit l'origine de l'angle polaire pour avoir $\theta = (\vec{e}, \vec{u}_\theta)$. Montrer que l'équation de la trajectoire peut se mettre sous la forme $r(\theta) = \frac{P}{1 - e\cos\theta}$ où e est la norme de \vec{e} .

En déduire la trajectoire du satellite.

5. Exprimer et calculer e et p en fonction de h , H et R .
6. Exprimer et calculer le demi-grand axe a de la trajectoire.
7. Énoncer sans démonstration la troisième loi de Kepler.
8. Exprimer la période Th de révolution d'Hipparcos en fonction de T , R , H et h . Calculer Th en heure.
9. Déterminer les valeurs numériques des angles θ_1 , θ_2 d'entrée et de sortie de la ceinture de Van Hallen du satellite. On donnera les valeurs comprises entre 0 et 180° .
10. Représenter sur un schéma clair la trajectoire du satellite et l'aire A balayée par \overline{OS} lors d'un passage dans la ceinture de Van Hallen et correspondant à la période d'inactivité de S .

Pour la question suivante, on prendra une valeur approchée de $A = 200 \cdot 10^6$ km².

11. Déterminer le rapport $\rho = \frac{t_0}{Th}$ en fonction de A et A_e (aire de l'ellipse) où t_0 est la durée totale d'inactivité d'Hipparcos sur une période. Application numérique.

On donne l'aire de l'ellipse :
$$A_e = \frac{\pi p^2}{(1 - e^2)^{3/2}}$$