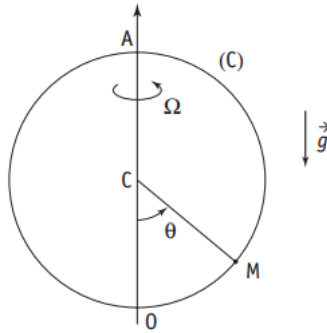


### Anneau coulissant sur un cercle. Analyse de portraits de phase.

Une circonférence, de rayon  $a$ , est située dans un plan vertical et tourne à vitesse angulaire  $\Omega$  constante autour de son diamètre vertical. Sur cette circonférence, un petit anneau  $M$ , assimilable à un point matériel de masse  $m$ , glisse sans aucun frottement. Sa position sur le cercle est repérée par l'angle  $\theta$  que fait le rayon  $CM$  avec la verticale descendante.



Le référentiel terrestre est supposé galiléen, et l'accélération de la pesanteur est notée  $g$ .

En posant  $\omega_o^2 = \frac{g}{a}$  et  $\lambda = \frac{\Omega^2}{\omega_o^2}$ , l'équation différentielle du mouvement de la masse  $m$  sur la

circonférence peut se mettre sous la forme :  $\ddot{\theta}(t) = \omega_o^2 \sin \theta (\lambda \cos \theta - 1)$  (1)

L'équation de conservation de l'énergie mécanique dans le référentiel lié à la circonférence peut

s'écrire :  $\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \omega_o^2 u(\theta) = K$  (cste) (2)

avec :  $u(\theta) = 1 - \cos \theta - \frac{1}{2} \lambda \sin^2 \theta$  où  $u(\theta)$  représente au facteur  $mga$  près l'énergie potentielle du système.

Données :  $m = 5 \cdot 10^{-2}$  kg ;  $g = 9,8$  m.s<sup>-2</sup> ;  $a = 0,39$  m.

1. En analysant la courbe  $\frac{\dot{\theta}}{\omega_o} = f(\theta)$  (fig. 2) donnée pour *une valeur particulière* de  $\lambda$ , montrer

qu'il y a dans ce cas trois types possibles de mouvement de l'anneau.

A l'aide de la figure 1, représentant  $u(\theta)$  pour différentes valeurs de  $\lambda$ , montrer que chaque type de mouvement correspond à un domaine précis de l'énergie mécanique : préciser les limites de ces différents domaines.

2. La figure 3 représente  $\frac{\dot{\theta}}{\omega}$  en fonction de  $\theta$  avec  $\omega = \omega_o \sqrt{1 - \lambda}$ .

Déterminer la valeur de  $\lambda$  correspondant à l'ensemble de ces courbes.

Pour quelles valeurs du coefficient  $K = \frac{E_m}{mga}$  l'oscillation de l'anneau est-elle à peu près sinusoidale ?

3. La figure 4 représente  $\frac{\dot{\theta}}{\omega_o}$  en fonction de  $\theta$  pour  $\lambda = 1$ . L'oscillation de l'anneau est-elle approximativement sinusoidale ?

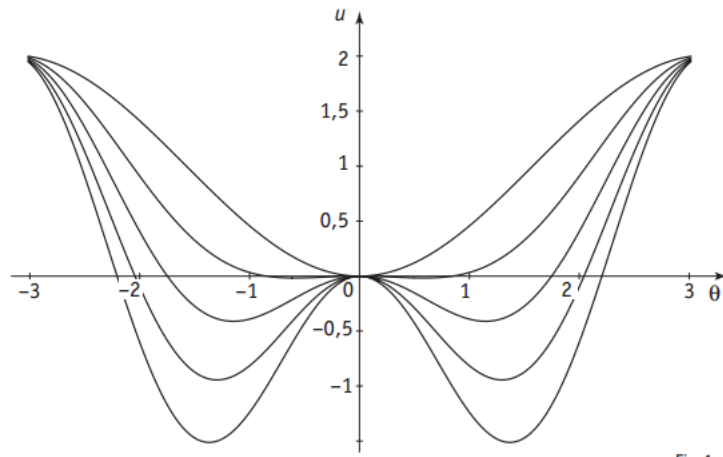


Fig. 1

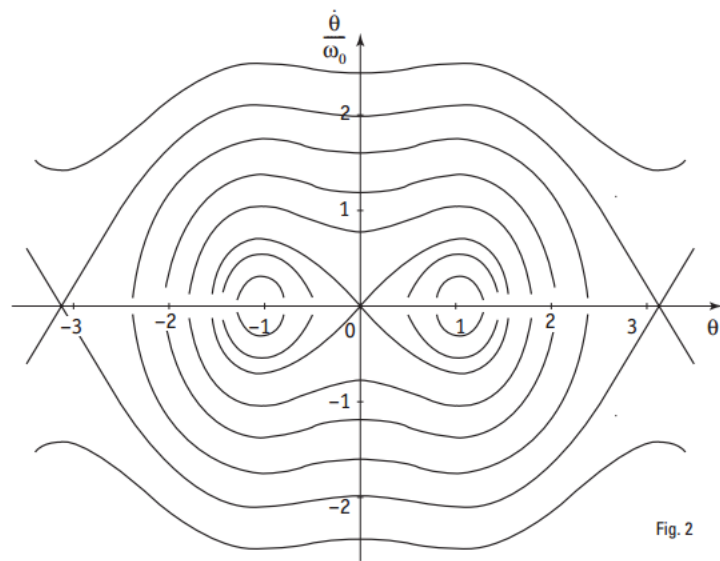


Fig. 2

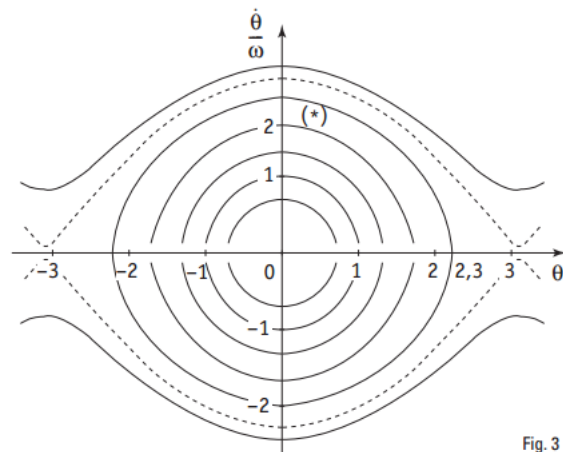


Fig. 3

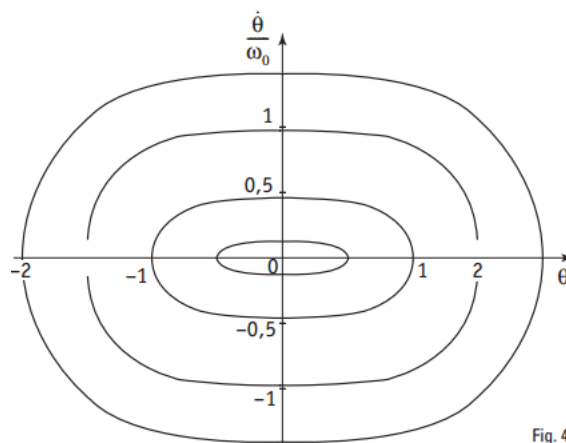


Fig. 4