Exercice 1. Champ de pesanteur terrestre. Relief terrestre.

On confondra le champ de pesanteur avec le champ gravitationnel créé par la Terre. La Terre sera assimilée à une sphère de centre *O*, de rayon R_T et de masse M_T dont la répartition est à symétrie sphérique. On désignera par g_o l'intensité de la pesanteur au sol.
On donne :
Champ de pesanteur terrestre au sol $g_o = 9{,}8$ m.s^{-2}
Rayon de la Terre $R_T = 6400$ km ;
Constante gravitationnelle $K = 6{,}67.10^{-11}$ S.I.

I. Relief terrestre.

1.1. Exprimer la masse M_T en fonction de go, K et R_T. Calculer M_T.

1.2. Exprimer la masse volumique moyenne ρ_m de la Terre en fonction de g_o, K et R_T. Calculer ρ_m.

1.3. Comparer ρ_m à l'ordre de grandeur de la masse volumique des roches superficielles, soit $\rho_o = 2{,}0.10^3$ kg.m^{-3}. Que pouvez-vous en conclure ?

1.4. En un point *N* d'altitude *h*, exprimer le champ de pesanteur *g* en fonction de g_o, *h* et R_T. Que devient cette expression dans le cas où $h \ll R_T$?

1.5. On imagine que l'on constitue en un point de la surface terrestre une colonne cylindrique verticale de hauteur *h* à partir de roches de masse volumique ρ_o. Ces roches ne peuvent pas résister à une pression $P_M = 2.10^8$ Pa sans se briser. En supposant la hauteur *h* de la colonne assez faible pour négliger les variations de la valeur du champ de pesanteur avec l'altitude, calculer numériquement la valeur limite de *h*.
Comparer ce résultat avec des données géographiques.
L'approximation posée est-elle justifiée ?

1.6. On considère un astre homogène, sensiblement sphérique et de rayon *R*, constitué des roches décrites dans la question précédente. Evaluer numériquement la valeur de *R* au-dessus de laquelle la hauteur des montagnes de l'astre ne peut dépasser le dixième du rayon de celui-ci.
Si vos connaissances astronomiques le permettent, comparer ce résultat aux données relatives à la forme des astres du système solaire.

II. Anomalies gravitationnelles.

On considère maintenant une région plane dont le sous-sol présente une cavité sphérique de rayon *R'*, remplie d'un matériau homogène de masse volumique μ' et dont le centre *O'* se trouve à la distance $O'H = h$ du sol. Cette cavité est entourée de roches de masse volumique μ. Loin de la cavité le champ de pesanteur au niveau du sol est g_o.

2.1 Exprimer l'anomalie $\overrightarrow{\Delta g}$ du champ de pesanteur en un point *P* du sol à la distance *x* de *H*. En quel point particulier $\overrightarrow{\Delta g}$ a-t-il le module maximal à Δg_m? Calculer Δg_m en fonction des données ci-dessus.

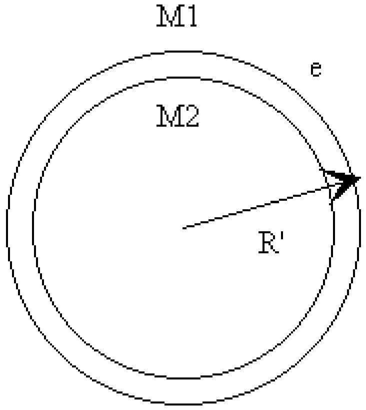
2.2 Quelle est la nature des courbes d'égale valeur de *g* ?

2.3 Sachant qu'il s'agit d'un angle faible, exprimer l'angle ε que font les vecteurs $\vec{g}$ et $\overrightarrow{g_o}$ .Trouver les points *Q* du sol tels que ε ait la valeur maximale.

2.4 Au cours d'une prospection on a trouvé la distance $HQ = 1\,200$ m et $\Delta g_m = 36$ mGal (1 Gal = 10^{-2} m.s^{-2}). Des sondages ont donné $\mu' = 6{,}8.10^3$ kg.m^{-3} et $\mu = 2{,}7.10^3$ kg.m^{-3}. Quels renseignements peut-on en déduire sur l'emplacement et l'importance de la cavité souterraine? Comment les résultats sont-ils modifiés dans le cas où $\mu' < \mu$?

3. On admettra qu'étant donné une distribution de masse limitée par une sphère de centre O et de rayon R, et telle que la masse volumique en un point P de la distribution ne dépende que de la distance $OP = r$ (distribution à symétrie sphérique), le champ gravitationnel $\vec{G}$ créé en un point A quelconque, intérieur ou extérieur à la distribution, est égal au champ qui serait créé par une particule située O, et dont la masse $M(r)$ est celle de la matière contenue à l'intérieur de la sphère de centre O et de rayon $OA = r$.

Soit une coquille sphérique homogène de rayon extérieur R', d'épaisseur $e < R'$, et de masse volumique μ.



3.1 Déterminer le champ gravitationnel $\vec{G}\,(r)$ créé par cette coquille en un point P situé à la distance r du centre de la coquille. Donner en particulier l'expression G_o du module du champ pour $r = R'$. Comment varie le module $G(r)$ à l'intérieur de la coquille ? Représenter graphiquement la variation de $G(r)$ en fonction de r.

3.2 On considère un très petit élément d'épaisseur e et entourant un point P de la coquille. Comparer entre eux les champs gravitationnels créés par cet élément en M_1 et M_2 situés respectivement sur la surface extérieure et sur la surface intérieure de l'élément. Comparer le champ créé en M_1 par l'élément à celui créé en M_1 par le reste de la coquille. En déduire le champ créé en M_1 par l'élément, à partir du champ qu'y crée la coquille.

3.3 On considère à la surface terrestre un plateau d'altitude z constitué d'une roche de masse volumique μ. En utilisant les résultats des questions 1.4. et 3.2, calculer le champ gravitationnel $\vec{g}$ au sommet du plateau. On exprimera ce champ en fonction de g_o, z, R, μ et ρ_m masse volumique moyenne de la Terre.

Calculer $\Delta g = g - g_o$.

Application numérique: $z = 10^3$ m, $\mu = 2{,}7.10^3$ kg.m^{-3}. Calculer Δg en mGal.

3.4 La Terre étant considérée comme une sphère dont l'écorce a la masse volumique μ, exprimer g en un point de profondeur $z' << R$. On néglige les variations locales de g.

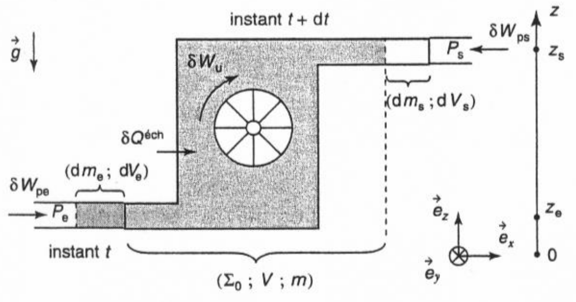
Application numérique : Calculer $g - g_o$ pour $z' = 10^3$m, $\mu = 2{,}7.10^3$ kg m^{-3}. Quelle devrait être la valeur de μ pour que g reste égal à g_o sur une certaine profondeur de l'écorce terrestre ?

Exercice 2. Premier principe « industriel ».

La plupart des machines traversées par des fluides (compresseur, détendeur, échangeur, chambre de combustion…) sont des systèmes ouverts. Cet exercice propose une nouvelle formulation du premier principe adaptée au monde industriel des fluides en écoulement.

Le champ de pesanteur est uniforme et d'intensité g. Un volume de contrôle V est délimité par une surface de contrôle S et définit le système ouvert Σ_0. La masse de fluide contenue dans ce volume est notée $m(t)$ à la date t et $m(t+\mathrm{d}t)$ à la date $t+\mathrm{d}t$. Le fluide s'écoule du réservoir de pression P_e au réservoir de pression P_s $(P_e > P_s)$: pendant la durée $\mathrm{d}t$ une masse $\mathrm{d}m_e$ entre ainsi par une ouverture de section S_e et une quantité de matière de masse $\mathrm{d}m_s$ sort par une ouverture de section S_s.
Le système fermé Σ considéré est composé à la date t des contenus matériels de V et $\mathrm{d}V_e$ et, à la date $t+\mathrm{d}t$, des contenus matériels de V et $\mathrm{d}V_s$.

Les grandeurs d'échange entre le système et le milieu extérieur sont :
- le transfert thermique élémentaire $\delta Q^{\text{éch}} = \mathcal{P}_{\text{th}}\mathrm{d}t$,
- le travail élémentaire des forces pressantes δW_p à l'entrée et à la sortie,
- le travail élémentaire utile $\delta W_u = \mathcal{P}_u \mathrm{d}t$ fourni à l'intérieur du réacteur par des pièces mobiles (ailettes ou piston).



Les débits massiques du fluide à l'entrée et à la sortie de la machine sont définis successivement par :

$$D_{me} = \frac{\mathrm{d}m_e}{\mathrm{d}t} \quad \text{et} \quad D_{ms} = \frac{\mathrm{d}m_s}{\mathrm{d}t}.$$

1. Établir un bilan de masse et un bilan d'énergie pour le système fermé Σ entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$.

2. Le système machine ouvert Σ_0 est dans un état stationnaire (ou permanent) : tous les paramètres qui le décrivent sont indépendants du temps. Montrer que le fluide s'écoule avec un débit massique D_m constant.
On note successivement pour les fluides entrant et sortant :
u_e, u_s : énergies internes massiques
h_e, h_s : enthalpies massiques
v_e, v_s : volumes massiques
c_e, c_s : vitesses macroscopiques
z_e, z_s : altitudes de leur centre de masse
Montrer que le premier principe de la thermodynamique peut se mettre sous la forme :

$$D_m\left[\left(h_s + \frac{1}{2}c_s^2 + gz_s\right) - \left(h_e + \frac{1}{2}c_e^2 + gz_e\right)\right] = \mathcal{P}_{\text{th}} + \mathcal{P}_u.$$

3. Pour effectuer la détente de Joule-Thomson, on réalise l'écoulement permanent d'un gaz dans une canalisation horizontale, indéformable et isolée thermiquement. Cet écoulement est lent, sans variation d'altitude et il ne dispose d'aucune pièce mobile pouvant fournir un travail utile. Quelle est la caractéristique d'un tel écoulement ?

4. Un moteur à turbine a pour but d'utiliser la variation d'énergie cinétique. Un gaz parfait est en écoulement permanent dans une canalisation horizontale, indéformable et isolée thermiquement, il se détend isothermiquement de la pression P_1 à la pression P_2 $(P_1 > P_2)$. Il passe à travers les pales attachées à un arbre rotatif pour fournir du travail. Quelle la puissance utile $\mathcal{P}_u$ récupérée ?