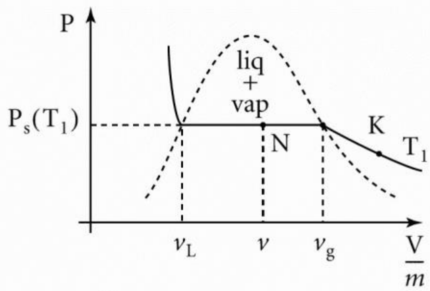
Exercice 1. Corps pur diphasé.

1. Vaporisation dans le vide.

L'état d'équilibre final est déterminé par $T = T_1$ et :

– $P < P_s(T_1)$ si toute l'eau est vaporisée (point K sur l'isotherme T_1).

– $P = P_s(T_1)$ s'il reste de l'eau liquide (équilibre diphasé) (point N).



Le volume massique de l'eau dans le réservoir est $v = \dfrac{V_0}{m} = \dfrac{5 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} = 2{,}5\ \mathrm{m^3 \cdot kg^{-1}}$

or $v_g = \dfrac{RT_1}{MP_s(T_1)} = 3{,}51\ \mathrm{m^3 \cdot kg^{-1}}$.

Il en résulte ($v < v_g$) que l'on est en présence d'un système diphasé (point N).

On a donc : $m = m_g + m_L$ et $V_0 = v_g m_g + m_L v_L$.

D'où $\quad m_g v_g + (m - m_g) v_L = V_0 \Rightarrow m_g = \dfrac{V_0 - m v_L}{v_g - v_L} \quad (1)$

or $v_L \ll v_g$ et certainement, étant données la valeur de V_0 et celle de m, $V_0 \gg m v_L$

soit : $m_g \approx \dfrac{V_0}{v_g} \quad (2) \Rightarrow \boxed{m_g = 1{,}42\ \mathrm{g} \quad \text{et} \quad m_L = 0{,}58\ \mathrm{g}}$

2. Détente isochore d'une vapeur d'eau saturante.

Caractéristiques de l'état final.

A l'état final F, l'eau se trouve en équilibre thermodynamique avec le thermostat. On a donc :

$$T_F = T_o$$

Par ailleurs, on fait l'hypothèse pour cet état F de l'existence d'un équilibre diphasé liquide-vapeur. On a alors :

$$p_F = p_o = 1\ \text{bar}$$

On note x_{VF} le titre en vapeur dans l'état final. L'énoncé indique la présence d'une vapeur d'eau saturante à l'état initial, on a alors $x_{VI} = 1$.

Comme la transformation est isochore, le volume V occupé par l'eau est constant. D'autre part le système étudié étant fermé, il y conservation de la masse. Ces deux constations permettent d'affirmer qu'il y conservation du volume massique. Soit :

$$v_I = v_F$$

$$x_{VI} v_{VI} + \underbrace{\left(1 - v_{VI}\right)}_{=0} v_{LI} = x_{VF} v_{VF} + \left(1 - x_{VF}\right) v_{LF}$$

$$x_{VF} = \frac{x_{VI} v_{VI} - v_{LF}}{v_{VF} - v_{LF}} \qquad x_{VF} = \frac{0{,}0998 - 1{,}04.10^{-3}}{1{,}70 - 1{,}04.10^{-3}}$$

$$x_{VF} = 5{,}81.10^{-2}$$

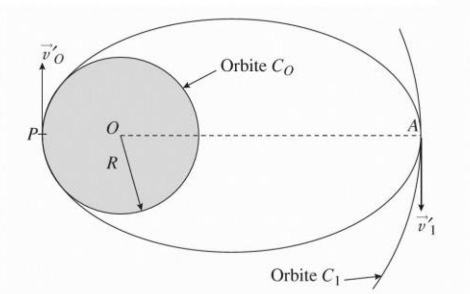
Ce résultat confirme *a posteriori* l'existence d'un équilibre diphasé.

Exercice 2. Transfert d'un satellite.

1 • Sur l'orbite circulaire de rayon R, on a :

$m\dfrac{v_0^2}{R} = mg_0$ d'où $v_0 = \sqrt{g_0 R}$.

2 • $v_0 = R\omega_0 = R\dfrac{2\pi}{T_0}$



$$T_0 = \frac{2\pi R}{\sqrt{g_0 R}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g_0}}.$$

3 • $v_E = R\dfrac{2\pi}{T_1}$

$$\frac{v_E}{v_0} = \frac{T_0}{T_1}$$

$$\left(\frac{v_E}{v_0}\right)^2 = \frac{4\pi^2}{T_1^2}\frac{R}{g_0}$$

4 • A.N. : $\left(\dfrac{v_E}{v_0}\right)^2 = 3{,}45.10^{-3}$.

5 • $\vec{F} = -G\dfrac{mM}{r^2}\vec{u}_r = m\vec{g}$. $\quad g = \dfrac{GM}{r^2}$ et $g_0 = \dfrac{GM}{R^2}$.

Donc $g = g_0\dfrac{R^2}{R_1^2}$ à la distance $r = R_1$.

6 • La période du satellite sur l'orbite C_1 doit être T_1.

$$m\omega_1^2 R_1 = mg = mg_0\frac{R^2}{R_1^2}.$$

$$R_1^3 = g_0\frac{R^2}{\omega_1^2} = g_0\frac{R^2}{4\pi^2}T_1^2.$$

$R_1 = 4{,}24.10^7$ m.

$x = \dfrac{R_1}{R} = 6{,}62.$

7 • $m\dfrac{v_1^2}{R_1} = \dfrac{GmM}{R_1^2} \qquad v_1^2 = \dfrac{GM}{R_1}$

De même $v_0^2 = \dfrac{GM}{R}$.

On en déduit :

$$v_1 = \frac{v_0}{\sqrt{x}}.$$

8 • Sur l'orbite C_1, l'énergie du satellite est :

$$E_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GmM}{R_1} = -\frac{1}{2}mv_1^2.$$

Sur la Terre : $E = \dfrac{1}{2}mv_E^2 - \dfrac{GmM}{R} = \dfrac{1}{2}mv_E^2 - mv_0^2$.

Le travail W à fournir pour passer à C_1 est :

$$W = E_1 - E = -\frac{1}{2}mv_E^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 + mv_0^2 \approx +\frac{1}{2}mv_0^2\left(2 - \frac{1}{x}\right)$$

$$W = K_0\left(2 - \frac{1}{x}\right).$$

9 • Lorsque le satellite est sur Terre, son énergie est :

$$E = \frac{1}{2}mv_E^2 - \frac{GmM}{R}.$$

$$W_1 = E_0 - E \approx -\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{GmM}{R} = +\frac{1}{2}mv_0^2.$$

$W_1 = K_0$.

10 • Le transfert se fait sur une ellipse de demi-grand axe $\dfrac{R + R_1}{2}$.

$$E_{\text{ellipse}} = -\frac{GmM}{R + R_1} = \frac{1}{2}mv_0'^2 - \frac{GmM}{R}.$$

$$v_0'^2 = 2GM\frac{R_1}{R(R + R_1)} = \frac{2GM}{R}\frac{x}{1 + x}$$

$$v_0'^2 = v_0^2\frac{2x}{1 + x}$$

$$v_0' = v_0\sqrt{\frac{2x}{1 + x}}.$$

11 • $W_2 = E_{\text{ellipse}} - E_0$

$$W_2 = -\frac{GmM}{R + R_1} + \frac{GmM}{2R} = GmM\frac{R_1 - R}{2R(R + R_1)}.$$

$$W_2 = K_0\frac{x - 1}{x + 1}.$$

12 • Au point A, on a :

$$E_{\text{ellipse}} = -\frac{GmM}{R_1} + \frac{1}{2}mv_1'^2 = -\frac{GmM}{R + R_1}.$$

$$v_1' = v_0\sqrt{\frac{2}{x(1 + x)}}.$$

13 • $W_3 = E_1 - E_{\text{ellipse}} = -\dfrac{GmM}{2R_1} + \dfrac{GmM}{R + R_1}$

$$W_3 = K_0\frac{x - 1}{x(1 + x)}.$$

$$W_1 + W_2 + W_3 = K_0\left(1 + \frac{x - 1}{x + 1} + \frac{x - 1}{x(1 + x)}\right)$$

$$= K_0\frac{2x^2 + x - 1}{x(1 + x)} = K_0\left(2 - \frac{1}{x}\right).$$

$W_1 + W_2 + W_3 = W$.

14 • La troisième loi de Kepler donne :

$$T_{\text{ellipse}}^2 = \frac{4\pi^2}{GM}\left(\frac{R + R_1}{2}\right)^3 \text{ et } T_1^2 = \frac{4\pi^2}{GM}R_1^3.$$

$$T_{\text{ellipse}} = T_1\left(\frac{R + R_1}{2R_1}\right)^{3/2}$$

$$t = \frac{T_{\text{ellipse}}}{2} = \frac{T_1}{2^{5/2}}\left(\frac{1 + x}{x}\right)^{3/2}.$$