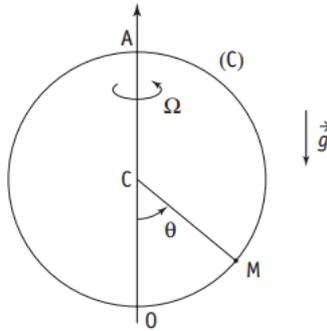


Anneau coulissant sur un cercle. Analyse de portraits de phase.

Une circonférence, de rayon a , est située dans un plan vertical et tourne à vitesse angulaire Ω constante autour de son diamètre vertical. Sur cette circonférence, un petit anneau M , assimilable à un point matériel de masse m , glisse sans aucun frottement. Sa position sur le cercle est repérée par l'angle θ que fait le rayon CM avec la verticale descendante.



Le référentiel terrestre est supposé galiléen, et l'accélération de la pesanteur est notée g .

En posant $\omega_0^2 = \frac{g}{a}$ et $\lambda = \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}$, l'équation différentielle du mouvement de la masse m sur la

circonférence peut se mettre sous la forme : $\ddot{\theta}(t) = \omega_0^2 \sin \theta (\lambda \cos \theta - 1)$ (1)

L'équation de conservation de l'énergie mécanique dans le référentiel lié à la circonférence peut

s'écrire : $\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \omega_0^2 u(\theta) = K$ (cste) (2)

avec : $u(\theta) = 1 - \cos \theta - \frac{1}{2} \lambda \sin^2 \theta$ où $u(\theta)$ représente au facteur mga près l'énergie potentielle du système.

Données : $m = 5 \cdot 10^{-2}$ kg ; $g = 9,8$ m.s⁻² ; $a = 0,39$ m.

1. En analysant la courbe $\frac{\dot{\theta}}{\omega_0} = f(\theta)$ (fig. 2) donnée pour une valeur particulière de λ , montrer

qu'il y a dans ce cas trois types possibles de mouvement de l'anneau.

A l'aide de la figure 1, représentant $u(\theta)$ pour différentes valeurs de λ , montrer que chaque type de mouvement correspond à un domaine précis de l'énergie mécanique : préciser les limites de ces différents domaines.

2. La figure 3 représente $\frac{\dot{\theta}}{\omega_0}$ en fonction de θ avec $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \lambda}$.

Déterminer la valeur de λ correspondant à l'ensemble de ces courbes.

Pour quelles valeurs du coefficient $K = \frac{E_m}{mga}$ l'oscillation de l'anneau est-elle à peu près sinusoidale ?

3. La figure 4 représente $\frac{\dot{\theta}}{\omega_0}$ en fonction de θ pour $\lambda = 1$. L'oscillation de l'anneau est-elle approximativement sinusoidale ?

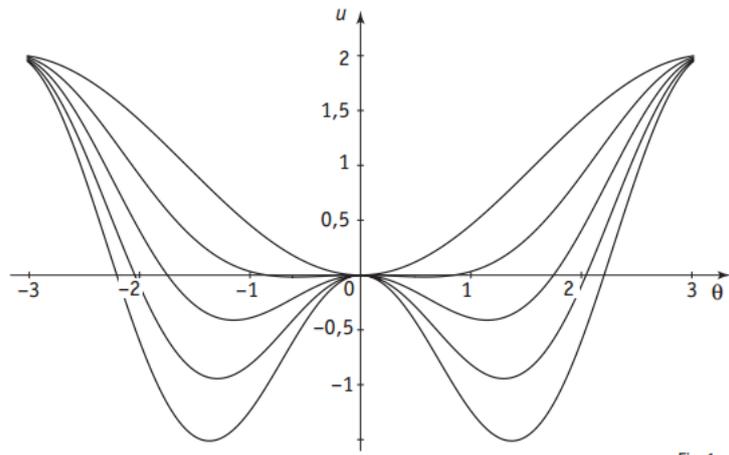


Fig. 1

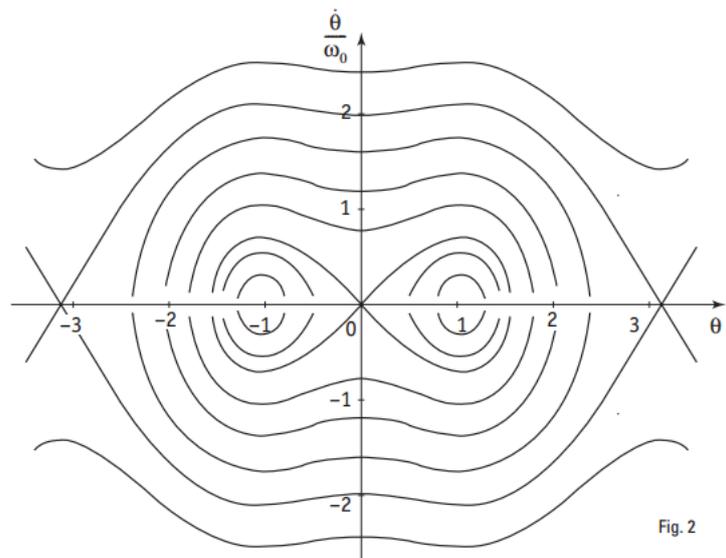


Fig. 2

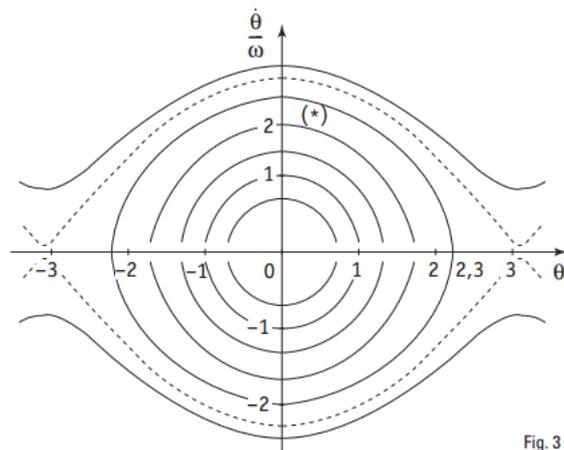


Fig. 3

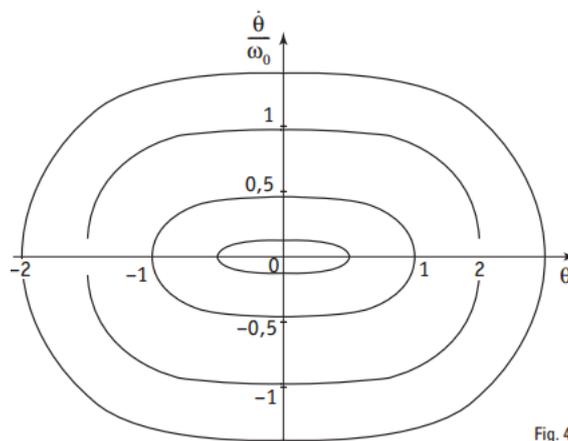


Fig. 4