Exercice 1. Moment magnétique d'un noyau atomique.

On cherche à déterminer l'expression du moment magnétique du noyau d'un atome.

On propose le modèle suivant :

Le noyau est supposé être constitué par une sphère de petit rayon a uniformément chargée en volume et tournant autour de l'un de ses diamètres avec la vitesse angulaire ω. L'axe de rotation est l'axe $z'z$, on utilise le repérage des coordonnées sphériques (r,θ,φ), la base locale sphérique étant alors $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$ et l'origine du repère le centre O du noyau de l'atome. Celui-ci possède Z protons, on note $-e$ la charge électronique (négative).

1) On considère une spire de rayon R et parcourue par un courant d'intensité I. Rappeler l'expression de son moment magnétique $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$.
2) On considère un élément $d\tau$ de volume du noyau centré sur un point M dont les coordonnées sont (r,θ,φ).
    a. Donner l'expression de l'élément de volume en fonction des variations élémentaires dr, $d\theta$ et $d\varphi$ des coordonnées (r,θ,φ). (On rappelle qu'il s'agit d'un parallélépipède dont chaque arête a pour longueur celle parcourue par le point M de coordonnées (r,θ,φ) dans la variation élémentaire de l'une des coordonnées, les autres étant alors considérées comme fixes.)
    b. Quel est le volume élémentaire engendré par la rotation du volume $d\tau$ autour de l'axe $(z'z)$?
    c. Quelle est la charge dq contenue dans ce volume ?
    d. Quelle est la durée T d'un tour effectué par cette charge ?
    En déduire l'expression de l'intensité di circulant dans la spire équivalente au volume $d\tau$ mobile.
    e. Ecrire le moment magnétique élémentaire $d\overrightarrow{\mathfrak{M}}$ associé à cette spire.
3) En déduire l'expression du moment magnétique total $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$ du noyau dans ce modèle.

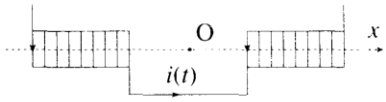
Donnée : $\int \sin^3\alpha d\alpha = -\cos\alpha + \dfrac{\cos^3\alpha}{3} + cste$

Exercice 2. Moteur synchrone.

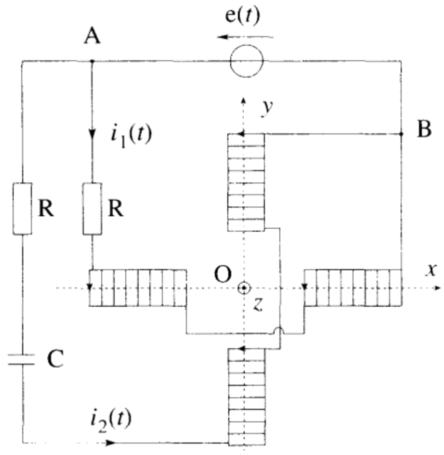
Les deux parties de l'exercice sont indépendantes.

A. Production d'un champ tournant

On constitue un système (S) avec deux solénoïdes identiques de même axe Ox parcourus dans le même sens par le même courant d'intensité i (figure ci-dessous).



On admet que le champ magnétique $\vec{B}$ créé au centre O de l'ensemble est de la forme $\vec{B}(t) = Ki(t)\vec{u}_x$, où K est une constante. Du point de vue électrique, un tel système est équivalent à une inductance L et à une résistance r en série.



On réalise maintenant le système (Σ), représenté sur la figure ci-dessus, comportant deux systèmes identiques à (S) et d'axes Ox et Oy orthogonaux. La fém du générateur s'écrit $e(t) = E\cos\omega_o t$. La capacité C permet de déphaser les courants $i_1(t) = I_1\cos(\omega_o t - \varphi_1)$ et $i_2(t) = I_2\cos(\omega_o t - \varphi_2)$ parcourant les deux systèmes (S).

1. Représenter le circuit électrique équivalent au système (Σ).
2. Ecrire les grandeurs complexes correspondant à $e(t), i_1(t)$ et $i_2(t)$.
3. Déterminer l'expression de I_1 et de $\tan\varphi_1$ en fonction de E, R, r, L, C, ω_o.
4. Déterminer l'expression de I_2 et de $\tan\varphi_2$ en fonction de E, R, r, L, C, ω_o.
5. a. En déduire les expressions de R et C en fonction de L, r et ω_o pour que l'on ait $I_1 = I_2$ et $\varphi_2 = \varphi_1 + \dfrac{\pi}{2}$.

   On rappelle que $\tan\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{1}{\tan x}$.

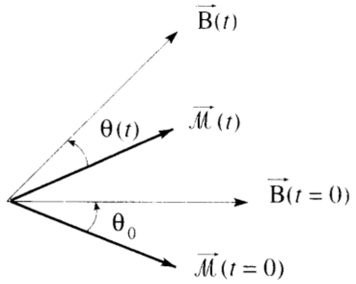
   b. Les conditions de la question précédente sont supposées remplies dans toute la suite de l'exercice. On pose $I = I_1 = I_2$. Déterminer I en fonction de E, L et ω_o et montrer qu'on a $\varphi_1 = -\varphi_2 = \dfrac{\pi}{4}$.
6. a. Déterminer l'expression des composantes sur Ox et Oy du champ magnétique en O, $\vec{B}(t)$.

   b. Déterminer son module B_T, en fonction de E, K et $L\omega_o$.

   c. Justifier l'appellation de « champ tournant » pour $\vec{B}(t)$. A quelle vitesse tourne-t-il ?

B. Entraînement du rotor.

Le rotor, ou partie mobile, du moteur synchrone est une bobine parcourue par un courant continu et assimilable à un moment magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}}$, de module $\mathcal{M}_o$ constant. Il est placé en O et on le suppose animé d'un mouvement de rotation autour de l'axe Oz à la vitesse angulaire ω constante. Le rotor est soumis au champ magnétique $\vec{B}(t)$ de norme constante B_T, et tournant lui aussi autour de Oz à la vitesse angulaire constante ω_o, qui est a priori différente de ω. On appelle $\theta(t)$ l'angle $\left(\overrightarrow{\mathcal{M}},\vec{B}\right)$ et on note $\theta(t=0)=\theta_o$ (cf. figure ci-dessous).



1. Exprimer $\theta(t)$ en fonction de t, ω, ω_o et θ_o. En déduire la valeur instantanée $\vec{\Gamma}(t)$ du moment du couple exercé par $\vec{B}(t)$ sur le rotor.
2. Calculer la valeur moyenne temporelle de $\Gamma(t)$ dans le cas où $\omega \neq \omega_o$. En déduire que le moteur ne fonctionne correctement que si $\omega = \omega_o$. On supposera cette condition vérifiée dans la suite de l'exercice. Exprimer alors Γ en fonction de $\mathcal{M}_o, B_T$ et θ_o.
3. Quelle est alors la puissance mécanique moyenne fournie P_m ? Quelle condition doit vérifier θ_o pour que cette machine fonctionne effectivement en moteur ?