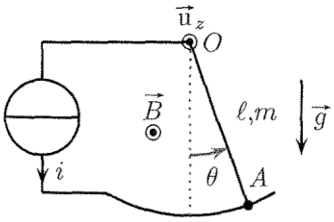
Barre dans un champ non uniforme.

Une barre métallique homogène, de longueur l et de masse m, peut pivoter sans frottement (liaison pivot parfaite) par rapport à l'axe horizontal $\left(O,\vec{u}_z\right)$.



Son extrémité inférieure est en contact sans frottement avec un arc de cercle métallique (point A) pour que l'ensemble constitue un circuit électrique plan. Un générateur impose un courant constant d'intensité i. Un dispositif approprié crée, dans la zone où se trouve la barre, un champ magnétique non uniforme dont l'expression en coordonnées cylindriques d'axe $\left(O,\vec{u}_z\right)$ est $\vec{B}=B_o\dfrac{r}{l}\vec{u}_z$. La position de la barre est repérée par l'angle θ par rapport à la verticale. On veut déterminer la position d'équilibre de la barre.

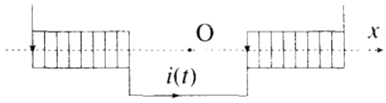
1. En coordonnées cylindriques, déterminer l'expression de la force de Laplace élémentaire s'appliquant sur un élément de la barre. En déduire la résultante (force de Laplace totale) s'exerçant sur la barre. La comparer à la force qui aurait été produite par un champ uniforme d'intensité B_o.
2. Déterminer le moment élémentaire par rapport à l'axe $\left(O,\vec{u}_z\right)$ de la force de Laplace élémentaire calculée précédemment. En déduire le moment total des actions de Laplace subies par la barre. Le comparer au moment qu'aurait produit un champ uniforme d'intensité B_o.
3. Déterminer l'angle θ_e repérant la position d'équilibre de la barre. Donner l'application numérique pour i = 1,0 A, m = 20 g, l = 20 cm, B_o = 0,10 T.
4. Les actions de Laplace sont des efforts répartis sur toute la barre. On peut définir le point d'application des actions de Laplace comme le point théorique N de la barre où s'appliquerait la résultante pour produire le même moment que les efforts répartis. Déterminer N et commenter sa position.

Moteur synchrone.

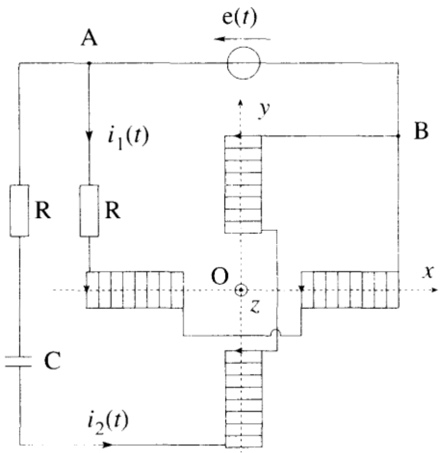
Les deux parties de l'exercice sont indépendantes.

A. Production d'un champ tournant

On constitue un système (S) avec deux solénoïdes identiques de même axe Ox parcourus dans le même sens par le même courant d'intensité i (figure ci-dessous).



On admet que le champ magnétique $\vec{B}$ créé au centre O de l'ensemble est de la forme $\vec{B}(t)=Ki(t)\vec{u}_x$, où K est une constante. Du point de vue électrique, un tel système est équivalent à une inductance L et à une résistance r en série.



On réalise maintenant le système (Σ), représenté sur la figure ci-dessus, comportant deux systèmes identiques à (S) et d'axes Ox et Oy orthogonaux. La fém du générateur s'écrit $e(t)=E\cos\omega_o t$. La capacité C permet de déphaser les courants $i_1(t)=I_1\cos(\omega_o t-\varphi_1)$ et $i_2(t)=I_2\cos(\omega_o t-\varphi_2)$ parcourant les deux systèmes (S).

1. Représenter le circuit électrique équivalent au système (Σ).
2. Ecrire les grandeurs complexes correspondant à $e(t), i_1(t)$ et $i_2(t)$.
3. Déterminer l'expression de I_1 et de $\tan\varphi_1$ en fonction de E,R,r,L,C,ω_o.
4. Déterminer l'expression de I_2 et de $\tan\varphi_2$ en fonction de E,R,r,L,C,ω_o.
5. a. En déduire les expressions de R et C en fonction de L, r et ω_o pour que l'on ait $I_1=I_2$ et $\varphi_2=\varphi_1+\frac{\pi}{2}$.

   On rappelle que $\tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\tan x}$.

   b. Les conditions de la question précédente sont supposées remplies dans toute la suite de l'exercice. On pose $I=I_1=I_2$. Déterminer I en fonction de E, L et ω_o et montrer qu'on a $\varphi_1=-\varphi_2=\frac{\pi}{4}$.
6. a. Déterminer l'expression des composantes sur Ox et Oy du champ magnétique en O, $\vec{B}(t)$.

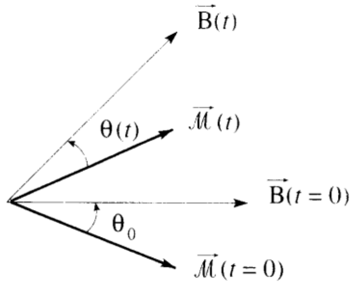
   b. Déterminer son module B_T, en fonction de E, K et $L\omega_o$.

   c. Justifier l'appellation de « champ tournant » pour $\vec{B}(t)$. A quelle vitesse tourne-t-il ?

B. Entraînement du rotor.

Le rotor, ou partie mobile, du moteur synchrone est une bobine parcourue par un courant continu et assimilable à un moment magnétique $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$, de module $\mathfrak{M}_o$ constant. Il est placé en O et on le suppose animé d'un mouvement de rotation autour de l'axe Oz à la vitesse angulaire ω constante.

Le rotor est soumis au champ magnétique $\vec{B}(t)$ de norme constante B_T, et tournant lui aussi autour de Oz à la vitesse angulaire constante ω_o, qui est a priori différente de ω. On appelle $\theta(t)$ l'angle $\left(\overrightarrow{\mathfrak{M}},\vec{B}\right)$ et on note $\theta(t=0)=\theta_o$ (cf. figure ci-dessous).



1. Exprimer $\theta(t)$ en fonction de t, ω, ω_o et θ_o. En déduire la valeur instantanée $\vec{\Gamma}(t)$ du moment du couple exercé par $\vec{B}(t)$ sur le rotor.
2. Calculer la valeur moyenne temporelle de $\Gamma(t)$ dans le cas où $\omega \neq \omega_o$. En déduire que le moteur ne fonctionne correctement que si $\omega = \omega_o$. On supposera cette condition vérifiée dans la suite de l'exercice. Exprimer alors Γ en fonction de $\mathfrak{M}_o, B_T$ et θ_o.
3. Quelle est alors la puissance mécanique moyenne fournie P_m ? Quelle condition doit vérifier θ_o pour que cette machine fonctionne effectivement en moteur ?