

Barre dans un champ non uniforme.

1. L'expression de la force de Laplace élémentaire s'appliquant en un point M de la barre est $d\vec{F}_{1a} = i d\vec{\ell}_M \wedge \vec{B}(M)$, soit $d\vec{F}_{1a} = i dr \vec{u}_r \wedge \frac{r}{\ell} B_0 \vec{u}_z$. En calculant le produit vectoriel, $d\vec{F}_{1a} = -ir dr \frac{B_0}{\ell} \vec{u}_\theta$. Dans cette expression, dr correspond à un accroissement élémentaire algébrique de r . En l'occurrence, $dr < 0$ car i est orienté de sorte à parcourir la barre en direction du point O , c'est-à-dire vers les r décroissants. Pour avoir la résultante, il faut sommer les forces élémentaires. Cela revient à calculer l'intégrale (dans le sens des r décroissants) des forces élémentaires,

$$\vec{F}_{1a} = \int_A^O d\vec{F}_{1a} = -i \frac{B_0}{\ell} \vec{u}_\theta \int_{r=\ell}^0 r dr = i \frac{B_0}{\ell} \frac{\ell^2}{2} \vec{u}_\theta \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{1a} = i B_0 \frac{\ell}{2} \vec{u}_\theta .$$

Les grandeurs i , B_0 , ℓ et \vec{u}_θ sont sorties de l'intégrale car elles sont constantes vis-à-vis de la variable r d'intégration. Si le champ magnétique avait été uniforme d'intensité B_0 , la résultante aurait été $\vec{F}_{\text{unif}} = i\ell B_0 \vec{u}_\theta$. Le champ étudié étant globalement moins intense que B_0 (voir figure E.21.2), il ne faut pas s'étonner que la résultante des forces de Laplace ait une norme inférieure à celle de \vec{F}_{unif} .

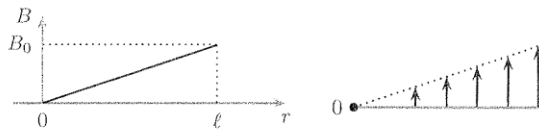


FIG. E.21.2. Champ magnétique en fonction de r . Schématisation de quelques forces de Laplace élémentaires s'appliquant sur la barre.

2. Le moment élémentaire au point O d'une force de Laplace élémentaire s'appliquant en un point M de la barre est défini par $d\mathcal{M}_{1a} = \vec{OM} \wedge d\vec{F}_{1a} = r \vec{u}_r \wedge [-ir dr \frac{B_0}{\ell} \vec{u}_\theta]$, soit $d\mathcal{M}_{1a} = -ir^2 dr \frac{B_0}{\ell} \vec{u}_z$. Le moment par rapport à l'axe (O, \vec{u}_z) s'obtient en projetant ce vecteur sur \vec{u}_z , c'est-à-dire en effectuant le produit scalaire avec \vec{u}_z , ce qui donne

$$d\mathcal{M}_{1a} = -ir^2 dr \frac{B_0}{\ell} .$$

Le moment total des actions de Laplace s'obtient en sommant ces moments élémentaires, c'est-à-dire en intégrant le long de la barre dans le sens conventionnel du courant, qui est le sens des r décroissants,

$$\mathcal{M}_{1a} = \int_{r=\ell}^0 d\mathcal{M}_{1a} = \int_{r=\ell}^0 -ir^2 dr \frac{B_0}{\ell} = -i \frac{B_0}{\ell} \left[\frac{r^3}{3} \right]_{r=\ell}^0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{M}_{1a} = \frac{1}{3} i B_0 \ell^2 .$$

Ce moment est positif si i et B_0 sont positifs : les actions de Laplace ont tendance à faire tourner la barre dans le sens trigonométrique dans ce cas, ce qui est prévisible par la règle des trois doigts de la main droite. Ce test permet de détecter une erreur sur le sens dans lequel l'intégrale est calculée. Si le champ magnétique était uniforme, les actions de Laplace seraient réparties uniformément sur la barre et le point d'application serait au milieu de la barre. Le bras de levier de \vec{F}_{unif} serait donc $\frac{\ell}{2}$ et le moment en O des actions de Laplace serait $\mathcal{M}_{\text{unif}} = \frac{\ell}{2} \vec{u}_r \wedge \vec{F}_{\text{unif}} \frac{1}{2} i B_0 \ell^2 \vec{u}_z$. En projection sur \vec{u}_z , le moment scalaire correspondant est $\mathcal{M}_{\text{unif}} = \frac{1}{2} i B_0 \ell^2$. Ce moment est plus intense que \mathcal{M}_{1a} car le champ uniforme $B_0 \vec{u}_z$ est globalement plus intense que le champ de la forme $\vec{B} = B_0 \frac{r}{\ell} \vec{u}_z$.

3. Les seules actions exerçant un moment par rapport à l'axe (O, \vec{u}_z) sur la barre sont le poids de la barre et les actions de Laplace. Le poids s'applique au milieu de la barre car celle-ci est homogène : le bras de levier du poids est donc $\frac{\ell}{2} \sin \theta$. L'équilibre de la barre, s'il est physiquement possible, se traduit en exprimant que la somme des moments est nulle,

$$\mathcal{M}_{1a} - mg \frac{\ell}{2} \sin \theta_{\text{eq}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin \theta_{\text{eq}} = \frac{2B_0 \ell i}{3mg} \quad \text{si} \quad \frac{2B_0 \ell i}{3mg} \in [-1, 1] .$$

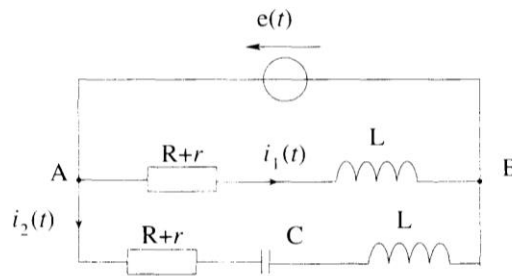
Le sinus n'existe que si sa valeur est dans l'intervalle $[-1, 1]$, ce qui n'est pas toujours le cas. Par exemple, si le produit $B_0 i$ est trop grand (cas de forces de Laplace intenses), l'équilibre n'existe pas et la barre ne fait que tourner autour de son axe. En pratique, elle ne le fait pas, car le point A quitte la zone de contact électrique et le courant dans le circuit s'annule. Avec les valeurs numériques données, l'angle θ_{eq} existe et $\theta_{\text{eq}} = 6,6 \cdot 10^{-2} \text{ rad} = 3,8^\circ$. L'écart par rapport à la verticale est tout à fait observable avec ces valeurs usuelles. En pratique, pour une expérience réalisée en classe, le champ magnétique est créé par un aimant en fer à cheval et est quasiment uniforme sur une partie de la barre. Les expressions sont donc un peu différentes (en particulier le préfacteur $2/3$), mais cela ne change pas les ordres de grandeur.

4. Par définition, le point d'application est N tel que $\mathcal{M}_{1a} = ON \times F_{1a}$ car ON est le bras de levier. On en déduit $ON = \frac{2}{3} \ell$. Tout se passe donc comme si la résultante des actions de Laplace s'appliquait aux deux tiers de la barre. C'est normal car les forces élémentaires de Laplace sont plus intenses loin de l'axe (O, \vec{u}_z) . Le point d'application N est donc plus éloigné de l'axe que ne l'est le milieu de la barre.

Moteur synchrone.

A. Production d'un champ tournant

1) Le schéma électrique équivalent s'obtient simplement en remplaçant les deux ensembles de deux solénoïdes par une inductance L en série avec une résistance r , ce qui donne le circuit suivant :



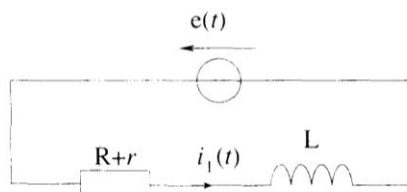
2) Les grandeurs complexes associées aux grandeurs réelles $e(t)$, $i_1(t)$ et $i_2(t)$ sont :

$$\underline{e}(t) = E e^{j\omega_0 t}$$

$$\underline{i}_1(t) = I_1 e^{j(\omega_0 t - \varphi_1)}$$

$$\underline{i}_2(t) = I_2 e^{j(\omega_0 t - \varphi_2)}$$

3) On écrit la loi des mailles pour la maille ci-dessous :



ce qui donne :

$$\underline{e}(t) = (R + r + jL\omega_0) \underline{i}_1(t)$$

soit

$$E e^{j\omega_0 t} = (R + r + jL\omega_0) I_1 e^{j(\omega_0 t - \varphi_1)}$$

d'où

$$I_1 e^{-j\varphi_1} = \frac{E}{R + r + jL\omega_0}$$

On en déduit que

$$I_1 = |I_1 e^{-j\varphi_1}| = \frac{E}{\sqrt{(R+r)^2 + L^2 \omega_0^2}}$$

et que

$$\varphi_1 = -\text{Arg } I_1 e^{-j\varphi_1} = \text{Arg}(R + r + jL\omega_0)$$

d'où

$$\tan \varphi_1 = \frac{L\omega_0}{R+r}$$

4) On procède de la même façon que précédemment avec la maille contenant le générateur et le condensateur. On obtient :

$$I_2 e^{-j\varphi_2} = \frac{E}{R+r+j\left(L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0}\right)}$$

d'où on déduit :

$$I_2 = \frac{E}{\sqrt{(R+r)^2 + \left(L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0}\right)^2}}$$

et

$$\tan \varphi_2 = \frac{L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0}}{R+r}$$

5. a) D'après les expressions de I_1 et I_2 déterminées aux questions précédentes, on a :

$$I_1 = I_2 \Leftrightarrow L^2\omega_0^2 = \left(L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0}\right)^2$$

ce qui donne :

$$L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} = \pm L\omega_0$$

La solution positive étant exclue car $\frac{1}{C\omega_0} \neq 0$, on en déduit :

$$C = \frac{1}{2L\omega_0^2}$$

D'autre part,

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan \varphi_2 = \frac{-1}{\tan \varphi_1}$$

En utilisant les expressions obtenues pour $\tan \varphi_1$ et $\tan \varphi_2$ ainsi que la relation $C = \frac{1}{2L\omega_0^2}$ sous la forme $\frac{1}{C\omega_0} = 2L\omega_0$, on obtient :

$$\frac{L\omega_0}{R+r} = \frac{R+r}{L\omega_0}$$

soit

$$L\omega_0 = \pm(R+r)$$

Toutes les grandeurs mises en jeu dans l'égalité précédente étant positives, on en déduit que :

$$R = L\omega_0 - r$$

5. b) Avec $L\omega_0 = R+r$, on obtient immédiatement :

$$I = I_1 = \frac{E}{\sqrt{2}L\omega_0}$$

En utilisant en plus $L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} = -L\omega_0$ et en injectant ces relations dans les expressions de $\tan \varphi_1$ et $\tan \varphi_2$, on obtient :

$$\tan \varphi_1 = 1 = -\tan \varphi_2$$

soit

$$\varphi_1 = -\varphi_2 = \frac{\pi}{4}$$

On a alors :

$$i_1(t) = I \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{et} \quad i_2(t) = I \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)$$

6. a) Soit $\vec{B}_1(t) = KI_1(t)\vec{u}_x$ le champ magnétique créé par l'ensemble des deux solénoïdes d'axe Ox et $\vec{B}_2(t) = -KI_2(t)\vec{u}_y$ celui créé par les deux autres solénoïdes (le signe « - » vient de l'orientation opposée des courants dans les solénoïdes du deuxième ensemble). On a :

$$\vec{B}(t) = \vec{B}_1(t) + \vec{B}_2(t) = KI \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right)\vec{u}_x - \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)\vec{u}_y$$

6. b) $B_T = KI \sqrt{\cos^2\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)}$. Or,

$$\cos^2\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right) = \cos^2\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin^2\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)$$

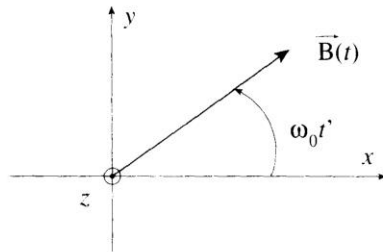
Comme $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, on obtient :

$$B_T = KI = \frac{KE}{\sqrt{2L\omega_0}}$$

6. c) En posant $\omega_0 t' = \omega_0 t - \frac{\pi}{4}$ (ce qui revient juste à changer l'origine des temps), on a :

$$\vec{B} = B_T \left[\cos(\omega_0 t')\vec{u}_x - \cos\left(\omega_0 t' + \frac{\pi}{2}\right)\vec{u}_y \right] = B_T \left[\cos(\omega_0 t')\vec{u}_x + \sin(\omega_0 t')\vec{u}_y \right]$$

Le vecteur \vec{B} tourne donc autour de l'axe Oz à la vitesse angulaire ω_0 , comme précisé sur le schéma ci-dessous.



B. Entraînement du rotor

1) Soit $\alpha(t)$ l'angle repérant la direction de \vec{B} au cours du temps. On a $\alpha(t) = \omega_0 t + \alpha_0$, où $\alpha_0 = \alpha(t=0)$.

De même, si on note $\beta(t)$ l'angle repérant la direction de \vec{M} au cours du temps, on a $\beta(t) = \omega t + \beta_0$.

Comme $\theta(t) = \alpha(t) - \beta(t)$, on a :

$$\theta(t) = (\omega_0 - \omega)t + \alpha_0 - \beta_0 = (\omega_0 - \omega)t + \theta_0$$

D'après le cours, $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$, donc :

$$\vec{\Gamma} = \mathcal{M}_0 B_T \sin[(\omega_0 - \omega)t + \theta_0] \vec{u}_z$$

2) $\langle \Gamma \rangle = \mathcal{M}_0 B_T \langle \sin[(\omega_0 - \omega)t + \theta_0] \rangle = 0$ si $\omega \neq \omega_0$ car la fonction sinus est de moyenne nulle. Le

rôle d'un moteur étant de fournir un couple non nul, il faut donc $\omega = \omega_0$. On a alors :

$$\langle \Gamma \rangle = \mathcal{M}_0 B_T \sin \theta_0$$

3) La puissance mécanique correspondante est alors $P_m = \langle \Gamma \rangle \omega = \mathcal{M}_0 B_T \omega \sin \theta_0$. La machine fonctionne en moteur si cette puissance est positive, c'est-à-dire si la force de Laplace est motrice. La condition mathématique correspondante est :

$$\omega \sin \theta_0 > 0$$

Dans le cas contraire, les forces de Laplace s'opposent au mouvement du rotor. La machine n'a alors plus un rôle moteur mais est utilisée en alternateur, c'est-à-dire qu'elle produit de l'électricité à partir d'un mouvement. C'est le phénomène d'induction électromagnétique.