Etude d'un manomètre.

1. La pression dans le liquide (1) est $P_0 + \rho_1 g h_1$ à la profondeur h_1. Cette pression est égale à la pression dans le liquide (2) à la profondeur h_2, soit $P_0 + \rho_2 g h_2$. Nous en déduisons la relation $\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2$.

2. Les grandeurs Δh, Δh_1 et Δh_2 sont positives.

a. En appliquant une surpression au-dessus du liquide (1), la surface de séparation va descendre de Δh.

b. Le niveau du liquide (1) baisse de Δh_1 alors que celui du liquide (2) monte de Δh_2. Les liquides étant incompressibles, les volumes déplacés $S_1\Delta h_1$, $S_2\Delta h_2$ et $s\Delta h$ sont égaux. Ainsi : $\Delta h_1 = \frac{s}{S_1}\Delta h$ et $\Delta h_2 = \frac{s}{S_2}\Delta h$.

c. Écrivons l'égalité des pressions à la surface de séparation :
$P_0 + \Delta P + \rho_1 g(h_1 - \Delta h_1 + \Delta h) = P_0 + \rho_2 g(h_2 + \Delta h_2 + \Delta h)$. Nous avons montré que $\rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2$.
Ainsi : $\rho_2 g(\Delta h_2 + \Delta h) = \rho_1 g(\Delta h - \Delta h_1) + \Delta P$, d'où $\Delta P = \left[\rho_2 g\left(\frac{s}{S_2}+1\right) + \rho_1 g\left(\frac{s}{S_1}-1\right)\right]\Delta h$.

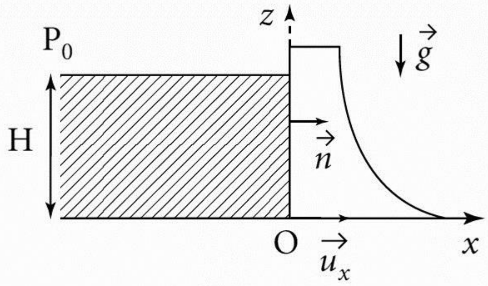
d. Nous en déduisons la sensibilité du manomètre : $s_e = \dfrac{1}{g\left[\rho_2\left(\frac{s}{S_2}+1\right)+\rho_1\left(\frac{s}{S_1}-1\right)\right]}$.

e. Nous obtenons $s_e = 1{,}9\,\mathrm{mm}\cdot\mathrm{Pa}^{-1}$ pour $S_1 = S_2 = 50s$ et $s_e = 3{,}6\,\mathrm{mm}\cdot\mathrm{Pa}^{-1}$ pour $S_1 = S_2 = 150s$. Le résultat est remarquable puisque le manomètre est sensible à des variations de pression de l'ordre de $1\,\mathrm{Pa}$ soit 10^{-5} bar !

f. La sensibilité peut également s'écrire : $s_e = \dfrac{1}{g\left[\rho_2\left(\frac{s}{S_2}+1\right)+\rho_2\left(\frac{s}{S_1}-1\right)+(\rho_2-\rho_1)\left(1-\frac{s}{S_1}\right)\right]}$
d'où $s_e = \dfrac{1}{g\left[\rho_2\left(\frac{s}{S_2}+\frac{s}{S_1}\right)+(\rho_2-\rho_1)\left(1-\frac{s}{S_1}\right)\right]}$. Fixons ρ_2. Nous voyons que la sensibilité augmente lorsque $\rho_2 - \rho_1$ diminue : on a intérêt à choisir des masses volumiques très voisines.

Retenue d'eau par un barrage.

1. La résultante des efforts de pression s'exerçant sur le barrage est donnée par l'expression :



$$\vec{F} = \iint P(M)\vec{n}\,\delta\Sigma.$$

Ici $\vec{n}$ est orienté dans le sens fluide → solide, et l'on a $\vec{n} = \vec{u}_x$,

d'où : $$\vec{F} = \left\{\iint P(M)\delta\Sigma\right\}\vec{u}_x \quad (1)$$

La pression dans l'eau varie linéairement avec z (loi de l'hydrostatique) :

$$\mathbf{P}(z) = \mathbf{P_0} + \boldsymbol{\rho_0 g}(\mathbf{H} - z)\,; \quad P(H) = P_0.$$

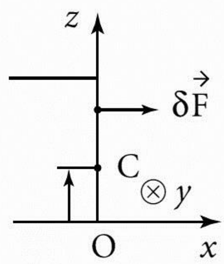
L'intégrale (1) s'écrit alors avec $\delta\Sigma = \mathrm{L}dz$: $\vec{F} = \int_0^H [P_0 + \rho_0 g(H - z)]\mathrm{L}dz\,\vec{u}_x$

soit : $$\vec{F} = \mathrm{L}\left[P_0 H + \rho_0 g\left(H^2 - \frac{H^2}{2}\right)\right]\vec{u}_x$$

D'où : $$\boxed{\begin{aligned} F_x &= \mathrm{LH}\left[P_0 + \rho_0 g\frac{H}{2}\right] \\ F_z &= 0 \end{aligned}} \quad (1)$$

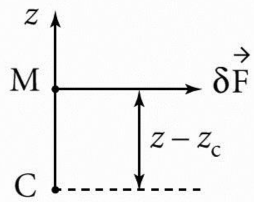
Centre de poussée C :

Il se situe sur l'axe Oz à mi-largeur et à une altitude z_c (comptée à partir de O) définie en écrivant que le moment en C des forces de pression y est nul. On a nécessairement $z_c < \frac{H}{2}$ la pression diminuant quand z augmente au sein du fluide.



On a donc pour la force $\delta\vec{F} = P(z)\mathrm{L}dz\,\vec{u}_x$

$$\delta\vec{\mathcal{M}}(C) = (z - z_c)P(z)\mathrm{L}dz\,\vec{u}_y$$



et au total : $\vec{\mathcal{M}}(C) = \int_0^H (z - z_c)\delta F\vec{u}_y = \vec{0}$.

D'où : $z_c \cdot F = \int_0^H z\delta F = \int_0^H zP(z)\mathrm{L}dz = I.$

L'intégrale I donne : $I = \int_0^H z[P_0 + \rho_0 g(H - z)]\mathrm{L}dz$

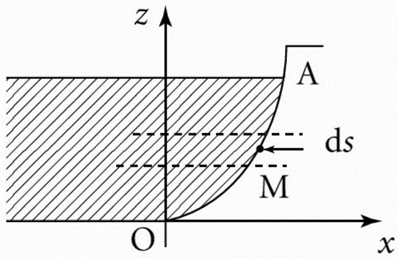
et $$I = \mathrm{L}\left[P_0\frac{H^2}{2} + \rho_0 g\left(\frac{H^3}{2} - \frac{H^3}{3}\right)\right] = \frac{\mathrm{LH}^2}{2}\left[P_0 + \rho_0 g\frac{H}{3}\right].$$

Soit avec (1) : $$z_c = \frac{\frac{\mathrm{LH}^2}{2}\left[P_0 + \rho_0 g\frac{H}{3}\right]}{\mathrm{LH}\left[P_0 + \rho_0 g\frac{H}{2}\right]}$$

d'où $$\boxed{z_c = \frac{H}{2}\frac{P_0 + \rho_0 g\frac{H}{3}}{P_0 + \rho_0 g\frac{H}{2}}}$$

on a bien $z_c < \frac{H}{2}$ comme il se doit…

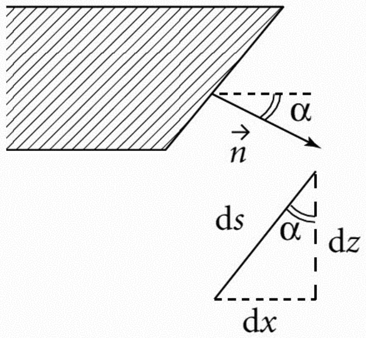
2. Le profil du barrage correspond désormais à la courbe d'équation $z = f(x)$.



Notons s l'abscisse curviligne repérant – à partir du point O – tout point M de cette courbe. Calculons la force élémentaire s'exerçant sur la « bande » de longueur L et de largeur ds

$$\delta\vec{F} = P(M)\vec{n}\,\delta\Sigma \quad \text{où} \quad \delta\Sigma = L\,ds$$

avec $P(M) = P_0 + \rho_0 g(H - z)$ (*cf.* **1.**).



Projetons cette force sur les axes Ox et Oz, nous obtenons :

$\delta F_x = P(M)\vec{n}\cdot\vec{u}_x\delta\Sigma = P(M)\cos\alpha L\,ds$

or $\cos\alpha\,ds = dz$, d'où $\delta F_x = P(z)L\,dz$

et au total $F_x = L\int_0^H P(z)\,dz$.

De même : $\delta F_z = P(M)\vec{n}\cdot\vec{u}_z\delta\Sigma = -P(M)\sin\alpha L\,ds$

avec cette fois-ci $\sin\alpha\,ds = dx$, d'où :

$$\delta F_z = -P(z)L\,dx \quad \text{et} \quad F_z = -L\int_0^{x_0} P[f(x)]\,dx.$$

Finalement, nous avons $\vec{F} = F_x\vec{u}_x + F_z\vec{u}_z$ avec :

$$F_x = L\int_0^H P(z)\,dz = L\int_0^H [P_0 + \rho_0 g(H - z)]\,dz = LH\left[P_0 + \rho_0 g\frac{H}{2}\right].$$

et $$\boxed{\begin{aligned} F_x &= LH\left[P_0 + \rho_0 g\frac{H}{2}\right] \\ F_z &= -L\int_0^{x_0}[P_0 + \rho_0 g(H - f(x))]\,dx \end{aligned}}$$ où $H = f(x_0)$.

• Application à un profil parabolique $z = \frac{1}{h}x^2$:

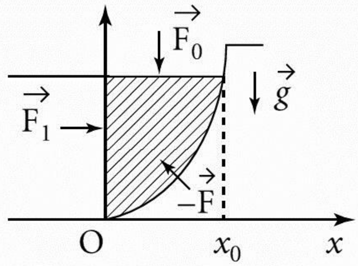
Il vient $Hh = x_0^2$ d'où $x_0 = \sqrt{Hh}$

et $$F_z = -L\int_0^{\sqrt{Hh}}\left[P_0 + \rho_0 gH - \rho_0\cdot g\frac{x^2}{h}\right]dx$$

$$F_z = -L\left[P_0\sqrt{Hh} + \rho_0 gH\sqrt{Hh} - \frac{\rho_0 g}{3h}Hh\sqrt{Hh}\right].$$

D'où $$\mathbf{F_z = -L\sqrt{Hh}\left[P_0 + \frac{2}{3}\rho_0 gH\right]}.$$

• On pourrait s'étonner que la composante F_x de la résultante des efforts de pression ne dépende pas du profil du barrage. Pour s'en persuader aisément, considérons le volume de fluide délimité par le barrage et le plan $x = 0$. Écrivons qu'il est en équilibre sous l'effet de son poids, des efforts de pression (eau + air) et de la réaction du barrage sur l'eau.



$$M_e\vec{g} + \vec{F}_0 + \vec{F}_1 + (-\vec{F}) = \vec{0}\,,\text{ où } \vec{F} \text{ est la force que l'on cherche.}$$

Projetons cette équation sur l'axe des x :

$$\vec{0} + \vec{0} + F_1\overrightarrow{u_x} - F_x\overrightarrow{u_x} = \vec{0} \Rightarrow \mathbf{F_x = F_1}.$$

La composante F_x ne dépend pas du profil $f(x)$ du barrage.

• On peut profiter de la remarque précédente pour calculer la composante F_z. Soit en projetant maintenant sur z : $-M_eg - F_0 + 0 - F_z = 0 \Rightarrow F_z = -M_eg - F_0$

avec $F_0 = P_0Lx_0$ et $M_e = \rho_eL\mathcal{S}$, où $\mathcal{S}$ est l'aire de la surface hachurée, soit :

$$\mathcal{S} = \int_0^{x_0}(H - z)\mathrm{d}x.$$

D'où $\quad F_z = -P_0Lx_0 - \rho_eLg\int_0^{x_0}(H - z)\mathrm{d}x$

que l'on peut encore écrire :

$$\mathbf{F_z = -L\int_0^{x_0}[P + \rho_eg(H - f(x))]\mathrm{d}x}.$$