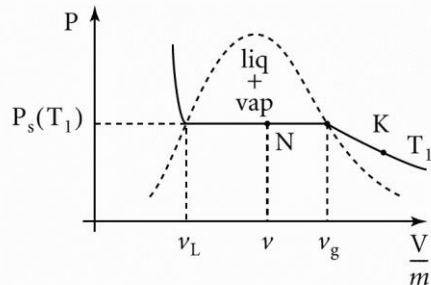


## Corps pur diphasé.

### 1. Vaporisation dans le vide.

L'état d'équilibre final est déterminé par  $T = T_1$  et :

- $P < P_s(T_1)$  si toute l'eau est vaporisée (point K sur l'isotherme  $T_1$ ).
- $P = P_s(T_1)$  s'il reste de l'eau liquide (équilibre diphasé) (point N).



Le volume massique de l'eau dans le réservoir est  $v = \frac{V_0}{m} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} = 2,5 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$

or  $v_g = \frac{RT_1}{MP_s(T_1)} = 3,51 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ .

Il en résulte ( $v < v_g$ ) que l'on est en présence d'un système diphasé (point N).

On a donc :  $m = m_g + m_L$  et  $V_0 = v_g m_g + m_L v_L$ .

D'où  $m_g v_g + (m - m_g) v_L = V_0 \Rightarrow m_g = \frac{V_0 - m v_L}{v_g - v_L}$  (1)

or  $v_L \ll v_g$  et certainement, étant données la valeur de  $V_0$  et celle de  $m$ ,  $V_0 \gg m v_L$

soit :  $m_g \approx \frac{V_0}{v_g}$  (2)  $\Rightarrow$   $m_g = 1,42 \text{ g}$  et  $m_L = 0,58 \text{ g}$

### 2. Détente isochore d'une vapeur d'eau saturante.

*Caractéristiques de l'état final.*

A l'état final  $F$ , l'eau se trouve en équilibre thermodynamique avec le thermostat. On a donc :

$$T_F = T_o$$

Par ailleurs, on fait l'hypothèse pour cet état  $F$  de l'existence d'un équilibre diphasé liquide-vapeur.

On a alors :

$$p_F = p_o = 1 \text{ bar}$$

On note  $x_{vF}$  le titre en vapeur dans l'état final. L'énoncé indique la présence d'une vapeur d'eau saturante à l'état initial, on a alors  $x_{vI} = 1$ .

Comme la transformation est isochore, le volume  $V$  occupé par l'eau est constant. D'autre part le système étudié étant fermé, il y a conservation de la masse. Ces deux constatations permettent d'affirmer qu'il y a conservation du volume massique. Soit :

$$v_I = v_F$$

$$x_{VI}v_{VI} + \underbrace{(1-v_{VI})}_{=0}v_{LI} = x_{VF}v_{VF} + (1-x_{VF})v_{LF}$$

$$x_{VF} = \frac{x_{VI}v_{VI} - v_{LF}}{v_{VF} - v_{LF}} \quad x_{VF} = \frac{0,0998 - 1,04 \cdot 10^{-3}}{1,70 - 1,04 \cdot 10^{-3}}$$

$$x_{VF} = 5,81 \cdot 10^{-2}$$

Ce résultat confirme *a posteriori* l'existence d'un équilibre diphasé.

## Optimisation d'une compression. Travail minimal.

### 1. Diagramme.

La pente de la compression isentropique (adiabatique et réversible) est plus grande que celle de l'isotherme.

Lors de la compression adiabatique réversible (a) il y a augmentation de la température du gaz. En effet :

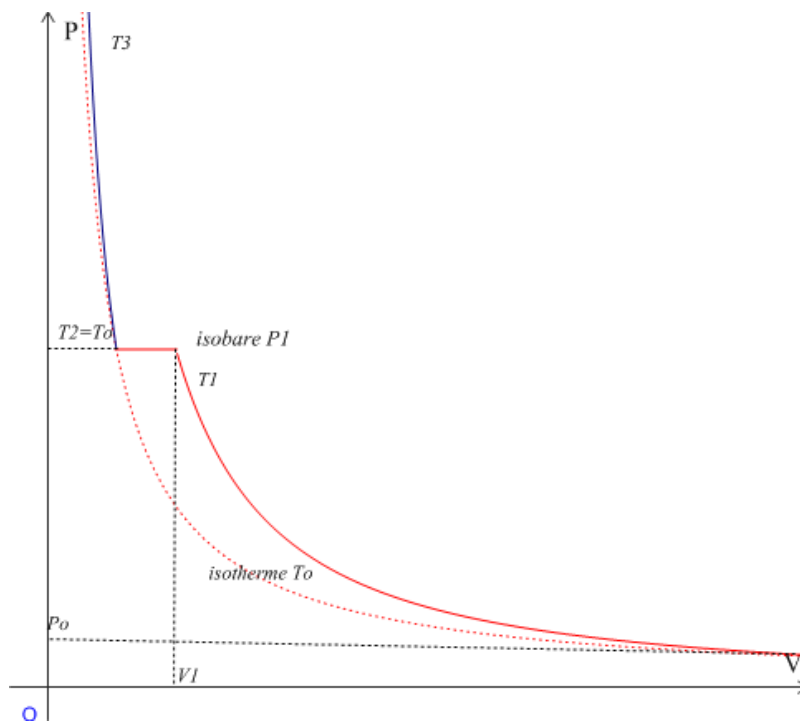
$$\Delta U_{\text{adiabatique, réversible}} = C_v \Delta T = W > 0 \Rightarrow T_1 > T_o$$

Lors de la transformation (b), isobare la température diminue car  $T_2 = T_o < T_1$  d'autre part :

$$p_1 V_1 = nRT_1 \text{ et}$$

$$p_2 V_2 = p_1 V_2 = nRT_2 = nRT_o \quad \text{d'où :}$$

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_o} \Rightarrow V_2 = \frac{T_o}{T_1} V_1 < V_1 \text{ l'état (2) se situe donc à gauche de l'état (1)}$$



### 2. Travail.

La variation d'énergie interne sur la transformation s'écrit :

$$\Delta U = nC_{Vm}(T_3 - T_o) = W_{\text{total}} + Q_{\text{isobare}} \text{ avec } Q_{\text{isobare}} = nC_{Pm}(T_2 - T_1)$$

Comme :  $C_{Vm} = \frac{R}{\gamma - 1}$ ,  $C_{Pm} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$  et  $T_2 = T_o$  on obtient :

$$W_{total} = \frac{nR}{\gamma-1}(T_3 - T_o) - \frac{nR\gamma}{\gamma-1}(T_o - T_1)$$

$$W_{total} = \frac{mR}{M(\gamma-1)}(\gamma T_1 + T_3 - (\gamma+1)T_o)$$

Comme les transformations (a) et (c) sont adiabatiques, réversibles concernant un gaz parfait de coefficient  $\gamma$  constant, la relation de Laplace est alors applicable pour expliciter les températures  $T_1$  et  $T_3$  :

Pour la transformation (a) :

$$T_1^\gamma P_1^{1-\gamma} = T_o^\gamma P_o^{1-\gamma} \rightarrow T_1 = T_o \left( \frac{P_o^{1-\gamma}}{P_1^{1-\gamma}} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$T_1 = T_o \beta^{\frac{-1+\gamma}{\gamma}} = T_o x$$

Pour la transformation (c) :

$$T_o^\gamma P_o^{1-\gamma} = T_3^\gamma P_3^{1-\gamma} \rightarrow T_3 = T_o \left( \frac{P_o^{1-\gamma}}{P_3^{1-\gamma}} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$T_3 = T_o \left( \frac{P_o^{1-\gamma}}{P_3^{1-\gamma}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = T_o \left( \beta^{1-\gamma} \left( \frac{1}{\alpha} \right)^{1-\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$T_3 = T_o \left( \beta^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \alpha^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right)$$

$$T_3 = \frac{T_o}{x} \alpha^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

On obtient ainsi l'expression du travail de compression :

$$W = \frac{mR}{M(\gamma-1)} T_o \left[ \gamma x + \frac{\alpha^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{x} - (\gamma+1) \right]$$

### 3. Travail minimal.

On recherche la valeur de  $x$  qui annule la dérivée de  $W$  par rapport à  $x$  :

$$\frac{dW}{dx} = 0 \rightarrow \gamma - \frac{\alpha^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{x^2} = 0$$

$$x^2 = \frac{\alpha^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{\gamma} \text{ or } x = \left( \frac{P_o}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

$$P_1 = P_o \left( \frac{\alpha^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{\gamma} \right)^{\frac{\gamma}{2(\gamma-1)}}$$

## Compression d'un gaz parfait.

**1.** Cette première transformation est irréversible. Le système va tendre vers un état d'équilibre (on peut supposer par exemple que des phénomènes tels que la viscosité du gaz sont à l'origine de l'amortissement nécessaire pour atteindre cet équilibre). Cet équilibre thermodynamique se traduira par un équilibre thermique (système en relation avec un thermostat) et un équilibre mécanique.

La création d'entropie s'obtient à l'aide du second principe appliqué au gaz : il faudra vérifier que la quantité obtenue est bien positive.

**2.** Cette fois-ci, à chaque instant, la pression du gaz est égale à la « pression extérieure » et sa température reste égale à  $T_0$  (la transformation devient réversible). L'état final est évidemment le même (l'opérateur n'exerce aucune action dans l'état final).

De plus, la transformation étant réversible il n'y a pas de création d'entropie.

**1. a.** Supposons que le système ait atteint sa position d'équilibre. Dans cet état, la température est imposée par le thermostat ; elle vaut donc  $T_0$ .

La condition d'équilibre mécanique (absence de frottements solides au niveau du piston) implique :

$$P_F = P_0 + \frac{mg}{s} \quad \text{soit} \quad \boxed{P_F = P_0(1+x)}$$

Soit un volume  $V_F$  tel que (loi des gaz parfaits) :

$$P_F V_F = nRT_F \Rightarrow V_F = \frac{nRT_0}{P_F} \quad (T_F = T_0).$$

$$\text{D'où : } \boxed{V_F = \frac{nRT_0}{P_0(1+x)}} \quad (\text{ou encore } V_F = \frac{V_0}{1+x}).$$

*Application numérique :*  $P_F = 10^5(1+0,5)$  soit :  $P_F = 1,5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ .

$$V_F = \frac{0,5 \times 8,31 \times 290}{10^5 \times 1,5} \quad \text{soit : } V_F = 8,0 \text{ dm}^3.$$

**1. b.** Dans une transformation irréversible, le travail élémentaire fourni par l'extérieur s'exprime sous la forme :  $\delta W = -P_{\text{ext}} dV$ .

$$\text{Soit au total : } W = -\int_{V_0}^{V_F} P_{\text{ext}} \cdot dV.$$

$$\text{Ici, } P_{\text{ext}} = P_0 + \frac{mg}{s}.$$

Le travail reçu par le gaz seul est tel que :

$$W = -\left(P_0 + \frac{mg}{s}\right)(V_F - V_0) = -P_0(1+x) \left[\frac{V_0}{1+x} - V_0\right]$$

$$W = +P_0 V_0 x \Rightarrow \boxed{W = nRT_0 x}$$

*Application numérique :*  $W = 602 \text{ J}$ .

Le thermostat lui fournit une énergie thermique  $Q$ . Le premier principe appliqué au gaz s'écrit :  $\Delta U = W + Q$ .

Le gaz étant parfait, son énergie interne ne dépend que de sa température ce qui implique ici  $\Delta U = 0$  ( $T_F = T_I = T_0$ ).

$$\text{D'où : } Q = -W \quad \text{et} \quad \boxed{Q = -nRT_0 x} \quad Q = -601 \text{ J}.$$

**1. c.** Pour déterminer la création d'entropie, on est amené à faire un bilan d'entropie.

$$\Delta S_{\text{gaz}} = S_e + \sigma,$$

avec  $S_e$  l'entropie échangée avec le thermostat à la température  $T_0$ .

$$\text{Or} \quad \Delta S_{\text{gaz}} = nC_v \ln \left( \frac{P_F V_F^\gamma}{P_I V_I^\gamma} \right). \quad \text{Soit ici : } \Delta S_{\text{gaz}} = nC_v \ln \left[ (1+x) \left( \frac{1}{1+x} \right)^\gamma \right].$$

$$\text{D'où} \quad \Delta S_{\text{gaz}} = \frac{nR}{\gamma-1} \ln((1+x)^{1-\gamma}) \Rightarrow \Delta S_{\text{gaz}} = -nR \ln(1+x).$$

$$\text{et } S_e = \frac{Q}{T_0} = -nRx.$$

On en déduit la création d'entropie :

$$\sigma = -nR \ln(1+x) + nRx \Rightarrow \boxed{\sigma = nR[x - \ln(1+x)]}$$

Application numérique :  $\sigma = 0,39 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ .

Il reste à vérifier que cette quantité  $\Delta_{\text{création}} S = \sigma(x)$  est bien – dans tous les cas – positive.

$$\sigma(x) = nR[x - \ln(1+x)].$$

$$\text{Or } \sigma(0) = 0 \text{ et } \frac{d\sigma}{dx} = nR \left[ 1 - \frac{1}{1+x} \right] = nR \frac{x}{1+x} > 0 \quad (x > 0).$$

On a bien  $\sigma(x > 0) > 0$ .

**2. a.** Le piston descendant très lentement, et sans frottements, on considérera que le gaz subit une transformation **réversible** dans laquelle sa pression est donnée, à chaque instant, par la relation :

$$P = \frac{nRT_0}{V} \quad (T = T_0).$$

Le gaz reçoit donc le travail  $W' = -\int PdV$ , soit :  $W' = -nRT_0 \int \frac{dV}{V}$ .

Remarquons alors que l'état final est identique à celui décrit au 1. (l'équilibre thermique  $\Rightarrow T_F = T_0$ ; l'équilibre mécanique donne  $P_F = P_0(1+x)$ , d'où un même volume final  $V_F$ ).

$$\text{Soit } W' = -nRT_0 \ln\left(\frac{V_F}{V_0}\right) \Rightarrow \boxed{W' = +nRT_0 \ln(1+x)}$$

Le gaz reçoit également une énergie thermique  $Q'$  du thermostat telle que (application du 1<sup>er</sup> principe au gaz) :  $\Delta U = W' + Q' = 0$  (gaz parfait et  $T_F = T_I = T_0$  d'où  $\Delta U = 0$ )

$$\text{et } \boxed{Q' = -nRT_0 \ln(1+x)}$$

Application numérique :  $W' = -Q' = 489 \text{ J}$ .

### Bilan entropique

Nous avons maintenant :  $\Delta S_{\text{gaz}} = -nR \ln(1+x)$ .

Ce résultat est évidemment identique à celui obtenu au 1. : mêmes états initial et final et  $S_{\text{gaz}}$  est une fonction d'état.

$$\text{De plus } S_e = \frac{Q'}{T_0} = -nR \ln(1+x).$$

On a donc  $\sigma = 0$  (transformation supposée réversible : pas de création d'entropie).

**2. b.** Nous avons obtenu au 1. b. et 2. a. :

$$\begin{cases} W = nRT_0 x & \text{et } W' = nRT_0 \ln(1+x) \\ \sigma = nR[x - \ln(1+x)] \end{cases}$$

On peut donc écrire :  $\boxed{W - W' = T_0 \sigma} \quad (1)$

On passe du même état initial  $(P_0, V_0, T_0)$  au même état final  $\left[ P_0(1+x), \frac{V_0}{1+x}, T_0 \right]$  par deux transformations différentes :

– la première est irréversible et monotherme : il faut fournir un travail irréversible  $W = W_{\text{irr}}$  ;

– la seconde est réversible et isotherme, le travail nécessaire est  $W' = W_{\text{rev}}$ .

La relation (1) se réécrit :

$$W_{\text{irr}}(I \rightarrow F) - W_{\text{rev}}(I \rightarrow F) = T_0 \sigma(I \rightarrow F/\text{irr}) \quad T_I = T_F = T_0.$$

### Commentaires

Pour la transformation du 1. on a :

$\Delta U = 0$  (transformation monotherme + gaz parfait)

d'où  $W_{\text{irr}} + Q_{\text{irr}} = 0$  avec  $\Delta S_{\text{gaz}} = \frac{Q_{\text{irr}}}{T_0} + \sigma$  soit  $W_{\text{irr}} = -T_0 \Delta S_{\text{gaz}} + T_0 \sigma$  (2)

Pour la transformation du 2. :

$\Delta U = 0$  et  $W_{\text{rev}} + Q_{\text{rev}} = 0$  avec  $\Delta S'_{\text{gaz}} = \frac{Q_{\text{rev}}}{T_0} + 0$

d'où  $W_{\text{rev}} = -T_0 \Delta S'_{\text{gaz}}$  (3)

Les équations (2) et (3) donnent alors :  $W_{\text{irr}} - W_{\text{rev}} = T_0 [\Delta S'_{\text{gaz}} - \Delta S_{\text{gaz}}] + T_0 \sigma$ .

Dans les deux cas, les états initial et final sont identiques donc le gaz subit la même variation d'entropie :  $\Delta S'_{\text{gaz}} = \Delta S_{\text{gaz}}$ . Ce qui conduit à la relation cherchée :

$$W_{\text{irr}} - W_{\text{rev}} = T_0 \sigma$$