

Fuite d'air dans une cabine spatiale.

1. Equation différentielle vérifiée par N .

Les molécules susceptibles de sortir de la cabine pendant le temps dt se trouvent dans un cylindre de volume dV tel que :

$$dV = uSdt$$

Le nombre de molécules contenu dans ce volume dV est :

$$\frac{N}{V}dV = \frac{N}{V}uSdt$$

avec N nombre de molécules dans la cabine à la date t .

Soit dN_s le nombre de molécules quittant la cabine pendant le temps dt .

Comme la vitesse des particules n'est orientée que selon les trois directions de l'espace, il y a seulement $1/6$ des molécules contenues dans dV qui vont quitter la cabine pendant le temps dt .

Soit :

$$dN_s = \frac{1}{6} \frac{N}{V} uSdt$$

Comme la variation du nombre de molécules dans la cabine pendant la durée dt est due aux molécules qui quittent la cabine on a :

$$N(t+dt) - N(t) = dN = -dN_s$$

Soit :

$$dN = -\frac{1}{6} \frac{N}{V} uSdt$$

$$\frac{dN}{dt} + \frac{1}{6} \frac{uS}{V} N = 0$$

2. Evolution de la pression.

La solution de cette équation différentielle est :

$$N = N_0 \exp\left(-\frac{1}{6} \frac{uS}{V} t\right) \quad \text{avec } N_0 \text{ nombre initial de molécules dans la cabine}$$

L'air étant assimilé à un gaz parfait on a :

$$PV = nRT = \frac{N}{N_A} RT \quad \text{avec } N_A \text{ nombre d'Avogadro}$$

$$P = \frac{1}{V} \frac{N_0}{N_A} RT$$

$$P = \frac{1}{V} \frac{N_0}{N_A} RT \exp\left(-\frac{1}{6} \frac{uS}{V} t\right)$$

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{1}{6} \frac{uS}{V} t\right)$$

3. Aire du trou.

A la date $t = 2$ minutes la pression est :

$$P(t) = \frac{P_0}{2} = P_0 \exp\left(-\frac{1}{6} \frac{uS}{V} t\right)$$

On obtient en prenant le logarithme népérien :

$$\ln 2 = \frac{1}{6} \frac{uS}{V} t \text{ d'où :}$$

$$S = \frac{6V \ln 2}{ut}$$

La vitesse quadratique u est :

$$u = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

On obtient finalement :

$$S = \frac{6V \ln 2}{t} \sqrt{\frac{M}{3RT}}$$

$$S = \frac{6 \times 200 \times \ln 2}{2 \times 60} \sqrt{\frac{29 \cdot 10^{-3}}{3 \times 8,31 \times 293}} = 1,4 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$$

Bouteille d'éther.

- a) La masse volumique est par définition le rapport de la masse par le volume donc $m = \rho V = 35,8 \text{ g}$.

La quantité de matière s'écrit $n = \frac{m}{M} = 0,483 \text{ mol}$.

- b) La masse volumique fournie par l'énoncé correspond à celle du liquide donc le volume massique du liquide est l'inverse de la masse volumique. On a donc $v_\ell = \frac{1}{\rho}$ soit numériquement $1,40 \text{ L.kg}^{-1}$.

Pour le volume massique de la vapeur saturante, on utilise le modèle du gaz parfait soit $PV = nRT$ avec $n = \frac{m}{M}$. On en déduit $v_\nu = \frac{V}{m} = \frac{RT}{MP}$ avec $P = P_{sat}(T)$ soit $v_\nu = \frac{RT}{MP_{sat}(T)}$ soit numériquement 600 L.kg^{-1} .

- c) En utilisant le diagramme de Clapeyron de l'équilibre liquide - vapeur, on en déduit qu'on a un mélange liquide - vapeur pour un volume massique compris entre v_ℓ et

v_v soit $v_\ell < v < v_v$. On obtient un encadrement du volume en multipliant cette inégalité par la masse m soit $mv_\ell < V = mv < mv_v$. L'application numérique conduit à $50,0 \text{ mL} < V < 21,5 \text{ L}$.

- d) Pour un volume $V = 5,50 \text{ L}$ et une masse $m = 35,8 \text{ g}$, on a un volume massique $v = \frac{V}{m} = 154 \text{ L.kg}^{-1}$. Ce volume massique est compris entre v_ℓ et v_v , ce qui confirme que le système est un mélange liquide - vapeur.

Le volume étant une grandeur extensive, on a $V = V_\ell + V_v$ soit avec les volumes massiques $mv = m_v v_v + m_\ell v_\ell$ avec $m = m_\ell + m_v$ la masse totale du système. On en déduit $v = \frac{m_v}{m} v_v + \frac{m_\ell}{m} v_\ell = x_v v_v + x_\ell v_\ell$ en notant x_v et x_ℓ les fractions molaires ou massiques respectivement de la vapeur et du liquide. Les fractions molaires et massiques sont égales ici puisque le système est constitué d'un corps pur. Par ailleurs, les fractions molaires ou massiques de la vapeur et de la vapeur sont liées par la relation $x_v + x_\ell = 1$ donc $x_\ell = 1 - x_v$. On en déduit $v = x_v v_v + (1 - x_v) v_\ell$ et $x_v = \frac{v - v_\ell}{v_v - v_\ell} = 25,5 \%$.

- e) A 49°C , on a un volume massique du liquide $v_\ell = \frac{1}{\rho}$ soit numériquement $1,47 \text{ L.kg}^{-1}$ et de la vapeur $v_v = \frac{RT}{MP_{sat}(T)}$ ou numériquement 219 L.kg^{-1} . On a $v = \frac{V}{m} = 154 \text{ L.kg}^{-1}$. Par conséquent, comme $v_\ell < v < v_v$, on a un mélange liquide - vapeur avec une fraction de vapeur $x_v = \frac{v - v_\ell}{v_v - v_\ell} = 70,1 \%$.

- f) Pour un volume $V' = 10,0 \text{ L}$, on obtient $v' = \frac{V'}{m} = 279 \text{ L.kg}^{-1}$. On aura un mélange liquide - vapeur à $18,0^\circ\text{C}$ puisque $v_\ell = 1,40 < v' < v_v = 600 \text{ L.kg}^{-1}$. La fraction de vapeur vaudra $x_v = 46,5 \%$.

En revanche, à 49°C , $v' > v_v = 219 \text{ L.kg}^{-1}$: l'éther sera sous forme gazeuse. On calcule la pression du système en utilisant l'équation des gaz parfaits soit $P = \frac{nRT}{V'} = \frac{mRT}{MV'}$ soit numériquement $1,29 \text{ bar}$. On vérifie bien que $P < P_{sat}(49^\circ\text{C})$ et que le système est sous forme gazeuse.