Trajectoire d'une comète.

On considère que la Terre décrit autour du Soleil de centre S une trajectoire circulaire de rayon $R_T = 150.10^9$ m, avec la période T_o, à la vitesse v_T. Une comète C décrit une orbite dans le même plan que celle de la Terre. Elle passe le plus près du Soleil à une distance kR_T, sa vitesse en ce point est v_1.

1. Déterminer la vitesse v de la comète lorsqu'elle coupe l'orbite terrestre en fonction de k, v_T et v_1.
   A.N. : $k = 0{,}42$, $v_T = 30{,}00.10^3$ m.s^{-1} et $v_1 = 65{,}08.10^3$ m.s^{-1}. Calculer v.

2. Montrer que la comète décrit une orbite elliptique.
   Exprimer son demi-grand axe a sous la forme $a = \lambda R_T$.
   Déterminer son excentricité e en fonction de k, v_T et v_1.
   Donner la période de révolution T de la comète sous la forme $T = nT_o$.
   A.N : Calculer λ, e et n.

3. Pendant combien de temps reste-t-elle dans l'orbite terrestre, c'est-à-dire $r = SC << R_T$?
   Cette durée donne l'ordre de grandeur de la durée de visibilité de la comète depuis la Terre, elle sera mise sous la forme d'une intégrale, puis, comme on n'en cherche qu'un ordre de grandeur, on prendra $e = 1$ pour effectuer le calcul, et on utilisera :
   $$\int_0^{\theta_o} \frac{d\theta}{\left(1+\cos\theta\right)^2} = \frac{1}{2}\tan\left(\frac{\theta_o}{2}\right) + \frac{1}{6}\tan^3\left(\frac{\theta_o}{2}\right).$$

Conseils :

1. Utiliser la conservation de l'énergie de la comète en l'exprimant au point de sa trajectoire le plus proche du Soleil et au point où elle coupe l'orbite terrestre.
2. Déterminer le signe de l'énergie de la comète. Exprimer a en fonction de l'énergie de la comète pour obtenir la relation $a = \lambda R_T$.
3. A partir de l'équation traduisant la conservation du moment cinétique, isoler $\dot{\theta}$ et le mettre sous la forme $\dot{\theta} = f(\theta)$.

En déduire l'ordre de grandeur de la durée de visibilité de la comète depuis la Terre en utilisant les hypothèses simplificatrices de l'énoncé.