Trajectoire d'une comète.

1 • L'énergie de la comète est :

• au point le plus proche du Soleil :

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2}mv_1^2 - m\frac{GM_S}{kR_T} ;$$

• au point où elle coupe l'orbite terrestre :

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2}mv^2 - m\frac{GM_S}{R_T} ; \qquad \textbf{(2)}$$

avec pour la Terre sur son orbite circulaire :

$$v_T^2 = \frac{GM_S}{R_T}. \qquad \textbf{(3)}$$

La conservation de l'énergie de la comète permet de déterminer v. Tous calculs faits, on obtient :

$$v = \sqrt{v_1^2 + 2v_T^2\left(1 - \frac{1}{k}\right)} = 41{,}8 \text{ km.s}^{-1}.$$

2 • L'énergie de la comète est égale à :

$$\mathscr{E} = m\left(\frac{1}{2}v_1^2 - \frac{v_T^2}{k}\right) = -25.10^6\, m \text{ (en joules)} ;$$

elle est négative, donc la trajectoire de la comète est une ellipse. Elle est reliée au demi-grand axe a par :

$$\mathscr{E} = -m\frac{GM_S}{2a} = -m\frac{v_T^2 R_T}{2a}.$$

Des relations **(1)** et **(3)**, on déduit $a = \dfrac{R_T}{\dfrac{2}{k} - \dfrac{v_1^2}{v_T^2}}$;

c'est de la forme $a = \lambda R_T$, avec $\lambda = \dfrac{1}{\dfrac{2}{k} - \dfrac{v_1^2}{v_T^2}}$.

Pour déterminer l'excentricité e de la trajectoire, on peut utiliser, par exemple, la distance comète–Soleil au périhélie : $r_P = kR_T = a(1-e)$, d'où :

$$e = 1 - \frac{k}{\lambda} = k\frac{v_1^2}{v_T^2} - 1$$

($e < 1$: la trajectoire est bien elliptique).

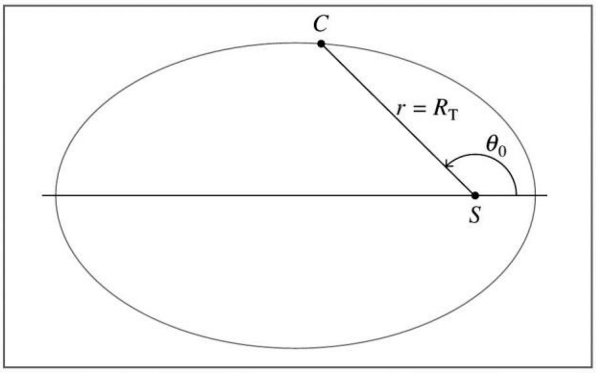
La troisième loi de Kepler donne $\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{T_0^2}{R_T^3}$, où T_0 est la période de rotation de la Terre autour du Soleil.

On en déduit $T = \lambda^{\frac{3}{2}} T_0 = nT_0$.

A.N. : $\lambda = 17{,}9$; $e = 0{,}977$ (e est donc proche de 1, l'ellipse est très excentrée) ; $n = 75{,}7$: la période de la comète est d'environ 76 ans (il s'agit sans doute de la comète de Halley).

3 • La loi des aires donne $r^2\dot{\theta} = \dfrac{L}{m} = kR_T v_1$ (au périhélie, la vitesse est orthogonale à SC). L'équation de la trajectoire est :

$r = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta}$, avec $p = r_P(1+e) = R_T\left(\dfrac{kv_1}{v_T}\right)^2$.



On en déduit :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{m}\frac{(1+e\cos\theta)^2}{p^2} = \frac{v_T^4}{R_T(kv_1)^3}(1+e\cos\theta)^2.$$

On pose $\tau = R_T\dfrac{(kv_1)^3}{v_T^4}$. La durée recherchée est :

$$\Delta t = \int_{\theta=-\theta_0}^{+\theta_0} dt = \tau\int_{-\theta_0}^{+\theta_0}\frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2},$$

où θ_0 est l'angle correspondant au point d'intersection de la trajectoire de la comète et de celle de la Terre (voir le *schéma* précédent).

Pour déterminer l'ordre de grandeur de Δt, on prend $e = 1$ (approximation justifiée par l'application numérique ci-dessus).

On obtient $\Delta t = 2\tau\left(\dfrac{1}{2}\tan\left(\dfrac{\theta_0}{2}\right) + \dfrac{1}{6}\tan^3\left(\dfrac{\theta_0}{2}\right)\right)$,

avec $R_T = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta_0}$, d'où :

$$\theta_0 = \arccos\left(\frac{k^2\dfrac{v_1^2}{v_T^2} - 1}{k\dfrac{v_1^2}{v_T^2} - 1}\right), \text{ soit } \theta_0 = 100°.$$

A.N. : $\Delta t = 1{,}76\,\tau$, soit environ 77 jours.